OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1902. N° 4

THÉORIE NOUVELLE DES SÉRIES ASYMPTOTIQUES

OBTENUES POUR LES FONCTIONS CYLINDRIQUES ET POUR DES FONCTIONS ANALOGUES

PAR

NIELS NIELSEN

Remarques historiques et critiques.

Poisson[1] a donné le premier une série asymptotique qui représente la fonction cylindrique $J^0(x)$ pour des valeurs très grandes et positives de x. Environ un quart de siècle plus tard, P.-A. Hansen[2] donne la série correspondante pour $J^1(x)$, tandis que l'illustre Jacobi[3] indique, mais sans communiquer sa démonstration, la série asymptotique plus générale trouvée pour $J^n(x)$, n étant un positif entier.

Les intéressants mémoires concernant les fonctions cylindriques publiés vers 1850 et 1860 traitent tous de la représentation asymptotique des fonctions susdites. En effet, Anger[4] étudie, avec plus de détails que Jacobi, la série asymptotique de $J^n(x)$, n étant un entier non négatif. Schlömilch[5]

[1] Journal de l'École Polytechnique, cahier 19, p. 350; 1823.

[2] Mémoire sur la détermination des perturbations absolues, p. 116—117; Paris 1845; l'édition allemande de ce mémoire a paru en 1843, mais je n'ai pu me la procurer à Copenhague.

[3] Astronomische Nachrichten, t. XXVIII, p. 94; 1848.

[4] Neueste Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig, t. V, p. 18; Danzig 1855.

[5] Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. II, p. 150; 1857.

donne directement — comme l'a fait HANSEN — les séries de $J^0(x)$ et $J^1(x)$; de plus, il indique comment il est possible de déduire aussi la série asymptotique représentant $J^n(x)$ (n positif entier), et il en est de même du mémoire de M. LIPSCHITZ [1].

Dans son livre sur les fonctions cylindriques, LOMMEL [2] indique formellement, sans démonstration rigoreuse, l'expression asymptotique plus générale obtenue pour $J^\nu(x)$, ν étant un nombre fini quelconque. Cependant, c'est HERMANN HANKEL [3] qui a réussi à donner le premier une solution complète du problème relatif à la représentation asymptotique d'une fonction cylindrique et à discuter ces devéloppements pour des valeurs différentes, mais à module très grand, de x. Or, une telle recherche a coûté beaucoup de peine à HANKEL, à cause de l'état rudimentaire où se trouvait à cette époque la théorie systématique des fonctions cylindriques qui venait d'être fondée dans ses éléments par le livre de M. C. NEUMANN [4] et aussi par celui de LOMMEL.

Pendant les dernières années, M. H. WEBER [5] (Strasbourg) a indiqué une méthode nouvelle pour déduire les séries asymptotiques susdites. Cependant, cette méthode me semble trop particulière pour éclaircir complètement cette théorie.

Le but principal du mémoire que j'ai l'honneur de présenter ici à *l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark* est de montrer comment une étude approfondie, mais très simple du reste, des fonctions cylindriques nous conduira immédiatement aux séries asymptotiques susdites et à toutes leurs formes différentes. Ce résultat a été obtenu en introduisant, outre $J^\nu(x)$ et $Y^\nu(x)$, deux nouvelles fonc-

[1] Journal de Crelle, t. LVI, p. 194; 1859.
[2] Studien über die Bessel'schen Functionen, p. 58, 93; Leipsic 1868.
[3] Mathematische Annalen, t. I, p. 491—501; 1869.
[4] Theorie der Bessel'schen Functionen, Leipsic 1867.
[5] Mathematische Annalen, t. XXXVIII; 1890. Voir aussi l'excellent livre de M. WEBER: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, t. I, p. 180; Brunswick 1900.

tions cylindriques qui possèdent relativement au changement du signe de x les mêmes propriétés que $J^{\nu}(x)$ et qui se comportent du reste comme $e^{\pm ix}$ pour des valeurs extrêmement grandes de $|x|$. Généralement on peut dire que $J^{\nu}(x)$ et $Y^{\nu}(x)$ sont des généralisations naturelles de $\cos x$ et de $\sin x$ respectivement, tandis que les fonctions nouvelles $H^{\nu}(x)$ correspondent à $e^{\pm ix}$. A cause de ces valeurs asymptotiques les fonctions $H^{\nu}(x)$ sont destinées à renouveler la théorie des intégrales définies contenant une fonction cylindrique. Dans le présent mémoire, j'e n'ai pu montrer que dans quelques cas particuliers ce rôle fondamental des fonctions $H^{\nu}(x)$.

Comme l'application la plus essentielle, connue pour le moment, des fonctions $H^{\nu}(x)$, je cite l'évaluation d'une série asymptotique représentant la fonction de Lommel $\Pi^{\nu,\rho}(x)$ qui est une généralisation très étendue des fonctions cylindriques. De cette manière on déduira, en faisant varier simplement les paramètres ν et ρ, toutes les formules particulières de ce genre connues auparavant dans les applications des cas particuliers de $\Pi^{\nu,\rho}(x)$ dans la Physique mathématique. On peut consulter par exemple les mémoires de MM. H.-F. Weber[1] (Zurich), H. Struwe[2] et du comte de Rayleigh[3].

Abstraction faite de ces applications, la fonction $\Pi^{\nu,\rho}(x)$ joue un rôle si essentiel dans la théorie des fonctions cylindriques qu'il n'est pas possible de l'exclure d'un traité systématique sur ces fonctions[4]. De plus, je démontrerai dans une autre occasion que des cas particuliers de $\Pi^{\nu,\rho}(x)$ donnent lieu aux développements des fonctions arbitraires en séries analogues à celles de Fourier mais contenant les fonctions susdites au lieu de $\cos x$ et de $\sin x$. C'est pourquoi je con-

[1] Vierteljahrsschrift d. Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, t. XXIV, p. 49; 1879.

[2] Annales de Wiedemann, t. XVII, p. 1008; 1883.

[3] Theory of Sound, t. II, p. 164; Londres 1896.

[4] Voir par exemple mon mémoire inséré dans les Annali di Matematica, t. VI, p. 64—78; 1901.

sidère comme essentiel le développement en série asymptotique de $\Pi^{\nu,\rho}(x)$.

Quant aux intégrales définies dont je fais usage dans les recherches suivantes, je me suis efforcé de les étudier d'une manière systématique et d'un point de vue général, ce qui n'a pas encore été fait dans les recherches antérieures sur ce difficile sujet.

On voit par exemple que M. SCHAFHEITLIN[1] a pu étudier de cette manière les intégrales qui représentent la série hypergèométrique. En effet, en substituant dans ses intégrales la fonction cylindrique générale $C^{\nu}(x)$ à $J^{\nu}(x)$, on voit que les calculs de M. SCHAFHEITLIN[2] conduiront toujours à l'équation de GAUSS. Puis, introduisons des fonctions cylindriques $H^{\nu}(x)$, nous obtiendrons des expressions intégrales valables aussi pour des valeurs imaginaires du quatrième élément de $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Cependant, je me réserve de revenir sur ce point dans une autre occasion.

Or, il est évident qu'une étude si générale des intégrales définies susdites nous conduira souvent à des fonctions beaucoup plus générales que les fonctions ordinaires; mais même dans ces cas, notre méthode est très avantageuse parce qu'elle nous donne immédiatement tous les cas plus particuliers où les fonctions susdites se réduisent aux fonctions connues; c'est-à-dire que les intégrales s'expriment à l'aide des fonctions élémentaires. De cette manière j'ai trouvé par exemple les intégrales figurant aux chapitres V, VI, tandis que je n'ai pas discuté ici les autres intégrales définies d'une forme analogue qui représentent aussi des fonctions cylindriques.

---

[1] Mathematische Annalen, t. XXX.
[2] loc. cit. p. 161—162.

Première Partie.

Fragments d'une théorie systématique des fonctions cylindriques.

Chapitre I.

Propriétés fondamentales des fonctions cylindriques.

§ 1. Fonctions cylindriques de première et de deuxième espèce.

La fonction cylindrique de première espèce (ou fonction cylindrique *bessélienne*) peut, pour des combinaisons quelconques des valeurs finies de ses deux variables: l'argument x et le paramètre ν, être exprimée par cette série infinie:

$$(1) \qquad J^{\nu}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\, \Gamma(\nu+s+1)},$$

pourvu que l'on ait défini d'une manière convenable la puissance x^{ν}.

Quant à la fonction cylindrique de deuxième espèce (ou fonction cylindrique *neumannienne*), la définition suivante paraît être la plus commode:

$$(2) \qquad Y^{\nu}(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left(\cos \nu\pi \cdot J^{\nu}(x) - J^{-\nu}(x)\right).$$

Dans le cas particulier où ν est égal à un entier n, l'expression figurant au second membre de (2) se présente sous une forme indéterminée. Or, posons pour abréger:

$$\psi(\omega) = D_{\omega} \log \Gamma(\omega) = -C - \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{1}{\omega+s} - \frac{1}{s+1}\right),$$

où C désigne la constante d'Euler; puis appliquons cette formule bien connue

$$\frac{1}{\Gamma(\omega-n)} = (-1)^n n!\,\omega + a\omega^2 + \ldots,$$

où n désigne un entier non négatif, le procédé ordinaire donnera immédiatement pour la fonction $Y^n(x)$ cette expression:

$$(3)\quad \begin{cases} \pi \cdot Y^n(x) = 2J^n(x)\log\frac{x}{2} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{s!\,(n+s)!}\big(\psi(s+1)+\psi(n+s+1)\big) + \\ \qquad + \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(n-s-1)!}{s!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s}, \end{cases}$$

où nous avons supposé pour un instant que l'entier n est positif ou zéro.

Pour étudier le cas où ce nombre est negatif, remarquons tout d'abord que la formule (2) donnera généralement:

$$(4)\qquad J^{-\nu}(x) = \cos\nu\pi \cdot J^\nu(x) - \sin\nu\pi \cdot Y^\nu(x),$$

$$(5)\qquad Y^{-\nu}(x) = \sin\nu\pi \cdot J^\nu(x) + \cos\nu\pi \cdot Y^\nu(x),$$

d'où, en supposant ν égal au positif entier n, on obtiendra:

$$(6)\qquad J^{-n}(x) = (-1)^n J^n(x), \quad Y^{-n}(x) = (-1)^n Y^n(x),$$

et voilà la détermination complète de notre fonction cylindrique de deuxième espèce.

On voit que la somme finie figurant au second membre de (3) contient à la fois des puissances positives et des puissances négatives de x; la somme des dernières puissances mérite d'être introduite comme fonction indépendante dans la théorie des fonctions cylindriques; posons avec SCHLÄFLI[1]:

$$(7)\qquad S^n(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} \frac{(n-s-1)!}{s!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s}.$$

La formule générale (3) est due à HANKEL[2] et SCHLÄFLI[3],

[1] Mathematische Annalen, t. III; 1871.
[2] Mathematische Annalen, t. I, p. 471; 1869.
[3] loc. cit.

tandis que RIEMANN[1] et MEISSEL[2] ont trouvé l'expression particulière pour $Y^0(x)$; cependant c'est M. C. NEUMANN[3] qui a donné le premier une expression explicite pour $Y^n(x)$, n étant un entier quelconque.

§ 2. *La fonction cylindrique générale $C^\nu(x)$.*

Ces remarques faites relativement aux fonctions $J^\nu(x)$ et $Y^\nu(x)$, il est aisé de voir que ces deux fonctions nous fournissent un moyen simple pour résoudre complètement ces deux équations fonctionnelles:

$$C^{\nu-1}(x) - C^{\nu+1}(x) = 2 D_x C^\nu(x), \tag{1}$$

$$C^{\nu-1}(x) + C^{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} C^\nu(x), \tag{2}$$

et cette équation différentielle linéaire et homogène du second ordre:

$$y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \tag{3}$$

souvent dite équation de BESSEL.

En effet, on voit que la solution la plus générale du système (1), (2) peut s'écrire sous cette forme[4]

$$C^\nu(x) = a(\nu) J^\nu(x) + b(\nu) Y^\nu(x), \tag{4}$$

où les deux fonctions $a(\nu)$ et $b(\nu)$, indépendantes de x, doivent être périodiques et avoir la période additive $+1$; mais du reste elles sont complètement arbitraires. Dans ce qui suit, nous désignons toujours comme *fonction cylindrique générale de l'argument x et du paramètre ν la fonction $C^\nu(x)$ définie à l'aide de* (4), *c'est-à-dire la solution générale du système* (1), (2).

[1] Mathematische Werke, p. 59; 2e éd. Leipsic 1892.

[2] Gewerbschulprogramm, Iserlohn 1862; citat de MEISSEL: Jahresbericht der Ober-Realschule Kiel 1890, p. 1.

[3] Theorie der Bessel'schen Functionen; Leipsic 1867.

[4] Voir par exemple mon mémoire dans les Annali di Matematica, t. V, p. 29; 1900.

Nous verrons bientôt la grande utilité de cette fonction cylindrique générale.

Supposons n égal à un entier, nous aurons généralement, en vertu de (6) § 1:

$$C^{-n}(x) = (-1)^n C^n(x), \tag{5}$$

car les coefficients $a(n)$ et $b(n)$ sont, à cause de la périodicité, indépendants de l'argument entier n.

Quant à l'intégrale complète de (3), elle peut être représentée par l'expression (4), pourvu que nous renoncions à la périodicité des coefficients $a(\nu)$ et $b(\nu)$. La fonction ainsi obtenue ne satisfait pas à (1), (2). Comme l'ont observé MM. V.-A. JULIUS[1] et SCHAFHEITLIN[2], la fonction Y introduite par LOMMEL[3] est de cette catégorie; c'est-à-dire que cette fonction n'est pas une fonction cylindrique.

On voit que les coefficients de la série infinie figurant au second membre de (3) § 1 ne sont pas des nombres rationnels, ce qui a lieu au contraire pour cette fonction:

$$\pi \cdot Y^n(x) - 2\,C \cdot J^n(x), \tag{α}$$

où C désigne la constante d'EULER. Il est évident que (α) est une fonction cylindrique de l'argument x et aussi du paramètre n; cependant l'adjonction de $2C \cdot J^n(x)$ entraînera une difficulté considérable et pour la définition générale de $Y^\nu(x)$ et pour le passage de cette fonction à celle du paramètre entier. De plus, le facteur π défigurait beaucoup les formules (4), (5) § 1 et les formules analogues (1), (2) que nous avons à développer plus bas au § 4.

L'introduction de $J^{-\nu}(x)$ qui n'est pas une fonction cylindrique de l'argument x et du paramètre ν, a été un empêchement considérable pour le traitement systématique de ces

[1] Archives Néerlandaises, t. XXVIII, p. 221—225; 1895.

[2] Journal de Crelle, t. CXIV, p. 38, 1894.

[3] Studien über die Bessel'schen Functionen, Leipsic 1868.

fonctions. En effet, l'introduction de $J^{-\nu}(x)$ défigure beaucoup un grand nombre de formules en les rendant inappliquables pour des valeurs entières du paramètre ν. Il suffit de renvoyer le lecteur aux mémoires de Lommel[1] et de M. Sonin[2] par exemple. De plus, un grand nombre des formules fondamentales trouvées pour $J^{\nu}(x)$ sont inappliquables pour $J^{-\nu}(x)$. Au contraire, introduisons $Y^{\nu}(x)$, toutes les formules susdites gardent leur validité dans tous les cas, de sorte que les formules fondamentales de $J^{\nu}(x)$, abstraction faite de celles qui se présentent comme une conséquence immédiate du fait que $\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} J^{\nu}(x)$ est une fonction transcendante entière, sont valables pour $Y^{\nu}(x)$ et par conséquent aussi pour la fonction cylindrique générale $C^{\nu}(x)$.

Cela posé, on voit clairement que l'introduction de $C^{\nu}(x)$ nous évite de démontrer les formules en question pour $J^{\nu}(x)$ et ensuite séparément pour $Y^{\nu}(x)$ aussi, ce que font généralement les auteurs antérieurs. En d'autres termes la fonction $J^{-\nu}(x)$ doit être à jamais bannie de la théorie des fonctions cylindriques comme fonction indépendante; sa seule raison d'être est son rôle comme fonction intermédiaire dans le passage de $J^{\nu}(x)$ à $Y^{\nu}(x)$.

§ 3. *Fonctions cylindriques de troisième espèce.*

Il est évident qu'il est possible d'exprimer la solution générale des équations fonctionelles (1), (2) § 2 à l'aide de deux autres solutions particulières indépendantes entre elles, et, quoique les fonctions $J^{\nu}(x)$ et $Y^{\nu}(x)$ soient les solutions les plus simples pour développer la théorie systématique des fonctions cylindriques, il nous sera très utile d'introduire ces deux fonctions nouvelles:

$$(1) \quad H_1^{\nu}(x) = J^{\nu}(x) + iY^{\nu}(x), \quad H_2^{\nu}(x) = J^{\nu}(x) - iY^{\nu}(x),$$

[1] Mathematische Annalen, t. IX.
[2] Mathematische Annalen, t. XVI.

pour lesquelles nous proposons le nom de: fonctions cylindriques de troisième espèce, ou bien de: fonctions cylindriques *hankéliennes.* En effet, les deux expressions obtenues de H_1 et H_2 en y remplaçant la fonction $Y^{\nu}(x)$ par l'expression (2) § 1 jouent un rôle fondamental dans les recherches d'HANKEL[1] sur la représentation asymptotique d'une fonction cylindrique. Plus tard HANKEL[2] mentionne l'utilité de $H_1^{\nu}(x)$, mais sans appliquer systématiquement une telle fonction.

Maintenant on voit sur-le-champ que $H_1^{\nu}(x)$ et $H_2^{\nu}(x)$ sont indépendantes entre elles; de même on exprime aisément, à l'aide de ces deux fonctions, les fonctions primitives $J^{\nu}(x)$ et $Y^{\nu}(x)$ et par conséquent aussi la fonction cylindrique générale $C^{\nu}(x)$.

Appliquons ensuite (4), (5) § 1, nous obtiendrons ici ces deux formules élégantes:

$$(2) \qquad H_1^{-\nu}(x) = e^{\nu\pi i} H_1^{\nu}(x), \quad H_2^{-\nu}(x) = e^{-\nu\pi i} H_2^{\nu}(x).$$

Puis, éliminons la fonction $Y^{\nu}(x)$; nous aurons, en vertu de (1):

$$(3) \qquad H_1^{\nu}(x) = \frac{i}{\sin\nu\pi}\left(e^{-\nu\pi i} J^{\nu}(x) - J^{-\nu}(x)\right),$$

formule qui nous démontrera aisément cette proposition remarquable:

Supposons positif l'argument x et réel le paramètre ν, les deux nombres conjugués

$$e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i} H_1^{\nu}\left(xe^{\frac{\pi i}{2}}\right), \quad e^{-\frac{\nu+1}{2}\pi i} H_2^{\nu}\left(xe^{-\frac{\pi i}{2}}\right)$$

sont des quantités réelles.

Cependant, la propriété la plus essentielle des fonctions cylindriques de troisième espèce, ce sont leurs expressions asymptotiques pour des valeurs très grandes de $|x|$. En effet,

[1] Mathematische Annalen, t. I, p. 491; 1869.

[2] Mathematische Annalen, t. VIII, p. 454; 1876.

comme nous le démontrerons au § 11, ces expressions sont du même caractère que $e^{\pm ix}$, et voilà la raison de la grande utilité de ces deux fonctions dans la théorie des intégrales définies contenant une fonction cylindrique. Dans les cas particuliers $\nu = \pm \frac{1}{2}$, nous aurons exactement:

$$(4) \qquad H_1^{\frac{1}{2}}(x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{ix}, \quad H_2^{\frac{1}{2}}(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{-ix},$$

$$(5) \qquad H_1^{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{ix}, \quad H_2^{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot e^{-ix}.$$

§ 4. Branches différentes d'une fonction cylindrique.

Les définitions mêmes des quatre fonctions cylindriques particulières montrent clairement que ces fonctions, à l'exception de celle de première espèce et de paramètre entier, ont à l'origine un point de ramification qui donnera naissance à une infinité de branches différentes de ces fonctions.

Considérons d'abord la fonction de première espèce dont le paramètre n'est pas égal à un entier; nous aurons, en désignant par p un entier quelconque:

$$(1) \qquad J^\nu(xe^{p\pi i}) = e^{p\nu\pi i} J^\nu(x),$$

ce qui donnera, en vertu de (2) § 1:

$$(2) \qquad Y^\nu(xe^{p\pi i}) = e^{-p\nu\pi i}\, Y^\nu(x) + \frac{2i\cos\pi\nu \cdot \sin p\nu\pi}{\sin\nu\pi} J^\nu(x),$$

et pour les fonctions de troisième espèce:

$$(3) \quad H_1^\nu(xe^{p\pi i}) = \cos p\nu\pi \cdot H_1^\nu(x) + i\sin p\nu\pi \cdot H_2^\nu(x) - \frac{2\cos\nu\pi \cdot \sin p\nu\pi}{\sin\nu\pi} J^\nu(x),$$

$$(4) \quad H_2^\nu(xe^{p\pi i}) = \cos p\nu\pi \cdot H_2^\nu(x) + i\sin p\nu\pi \cdot H_1^\nu(x) + \frac{2\cos\nu\pi \cdot \sin p\nu\pi}{\sin\nu\pi} J^\nu(x).$$

Dans le cas où le nombre entier p est pair, les quatre formules que nous venons d'établir nous donnent toutes les branches différentes des fonctions correspondantes obtenues en faisant tourner la variable x autour du point critique $x = 0$.

Dans l'autre cas particulier, où ν est un nombre entier, les trois dernières de ces formules se présentent sous une forme élégante.

Posons maintenant $p = \pm 1$, une combinaison de (3), (4) et de (2) § 3 donnera ces deux formules remarquables:

$$(5) \qquad H_1^{\nu}(xe^{\pi i}) = -H_2^{-\nu}(x) = e^{-(\nu+1)\pi i} H_2^{\nu}(x),$$

$$(6) \qquad H_2^{\nu}(xe^{-\pi i}) = -H_1^{-\nu}(x) = e^{(\nu+1)\pi i} H_1^{\nu}(x),$$

formules qui nous seront très utiles plus loin.

On voit que $C^{-\nu}(-x)$ est une fonction cylindrique de l'argument x et du paramètre ν, pourvu que $C^{\nu}(x)$ le soit; or, les formules (5), (6) donnent immédiatement:

$$(7) \quad H_1^{-\nu}(xe^{\pi i}) = -H_2^{\nu}(x), \quad H_2^{-\nu}(xe^{-\pi i}) = -H_1^{\nu}(x),$$

tandis que les formules analogues contenant $J^{-\nu}(-x)$ et $Y^{-\nu}(-x)$ seront beaucoup plus compliquées.

Chapitre II.

Intégration d'une certaine équation différentielle linéaire non homogène.

§ 5. Propriétés fondamentales de la fonction de Lommel.

Dans un mémoire récent[1] j'ai démontré qu'il est possible de déduire aisément toutes les fonctions dites *besséliennes* de seconde espèce, à l'aide de la fonction de LOMMEL

$$(1) \quad \Pi^{\nu,\rho}(x) = \cos\frac{\pi}{2}(\nu-\rho) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+2s}}{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu}{2}+s+1\right)},$$

en spécialisant les deux paramètres ν et ρ.

[1] Annali di Matematica, t. VI, p. 64—78; 1901.

Ici nous nous bornerons à considérer quelques cas particuliers de notre fonction générale, cas particuliers qui nous seront indispensables dans nos recherches suivantes sur des intégrales définies. En premier lieu, posons $\rho = 0$, $\rho = 1$; nous aurons respectivement:

$$(2) \quad \Pi^{\nu,0}(x) = \Pi^{\nu}(x) = \frac{2\cos\frac{\nu\pi}{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\varphi)\cos(\nu\varphi)\,d\varphi,$$

$$(3) \quad \Pi^{\nu,1}(x) = X^{\nu}(x) = \frac{2\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\varphi)\cos(\nu\varphi)\,d\varphi,$$

de façon que la somme $\Pi^{\nu}(x) + X^{\nu}(x)$ nous donne la fonction d'Anger [1]:

$$(4) \quad \Psi^{\nu}(x) = \Pi^{\nu}(x) + X^{\nu}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\varphi - \nu\varphi)\,d\varphi,$$

qui représente une généralisation de la première intégrale de Bessel [2] représentant la fonction $J^n(x)$, n étant un entier; la fonction $\Psi^{\nu}(x)$ d'Anger est certainement le premier essai fait pour généraliser la fonction cylindrique de première espèce et de paramètre entier.

Désignons ensuite par n un entier non négatif, nous aurons, en vertu de (1):

$$(5) \quad \Pi^{\nu,\nu-2n}(x) = J^{\nu}(x), \quad \Pi^{\nu,-\nu-2n}(x) = \cos\nu\pi\cdot J^{-\nu}(x).$$

Posons encore:

$$(6) \qquad \mathfrak{B}^{\nu,n}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)};$$

nous aurons de même, n désignant un positif entier:

[1] Comptes rendus, t. XXXIX, p. 129; 1854. Neueste Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig, t. V, p. 16; 1855.

[2] Abhandlungen der Berliner Akademie, 1824, p. 22.

$$(7)\qquad \begin{cases} \Pi^{\nu,\nu+2n}(x) = J^{\nu}(x) - \mathfrak{B}^{\nu,n}(x), \\ \Pi^{\nu,-\nu+2n}(x) = \cos\nu\pi\left(J^{-\nu}(x) - \mathfrak{B}^{-\nu,n}(x)\right). \end{cases}$$

Enfin, posons $\rho = 1 - \nu$, nous aurons de même:

$$(8)\qquad \Pi^{\nu,1-\nu}(x) = \sin\nu\pi \cdot Z^{-\nu}(x),$$

où l'on a posé:

$$(9)\qquad Z^{\nu}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s+1}}{\Gamma(s+\frac{3}{2})\,\Gamma(\nu+s+\frac{3}{2})},$$

ou bien, pourvu que $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$:

$$(10)\qquad Z^{\nu}(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi)(\cos\varphi)^{2\nu}\,d\varphi,$$

intégrale qui est très analogue à celle qui représente $J^{\nu}(x)$. La fonction $Z^{\nu}(x)$ a été introduite, pour ν entier, par M. P. SIEMON [1].

Dans le cas plus général $\rho = -\nu + 2n + 1$, n désignant un entier quelconque, nous avons de même:

$$(11)\qquad \Pi^{\nu,-\nu+2n+1}(x) = (-1)^n \cdot \sin\pi\nu \cdot Z^{-\nu,n}(x),$$

où l'on a posé pour abréger:

$$(12)\qquad Z^{\nu,n}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n+2s+1}}{\Gamma(n+s+\frac{3}{2})\,\Gamma(\nu+n+s+\frac{3}{2})}.$$

Désignons toujours par n un entier non négatif, nous aurons de même, en vertu de (8), (5):

$$(13)\qquad Z^{-n-\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n J^{n+\frac{1}{2}}(x),$$

$$(14)\qquad Z^{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1}\left(J^{-n-\frac{1}{2}}(x) - \mathfrak{B}^{-n-\frac{1}{2},n+1}(x)\right).$$

[1] Programm der Luisenschule, Berlin; Ostern 1890.

§ 6. Dérivées de la fonction de Lommel prises par rapport aux paramètres.

Considérons maintenant la dérivée de $\Pi^{\nu,\rho}(x)$ prise par rapport au paramètre ρ, fonction qui peut être formée immédiatement à l'aide de (1) § 5, de façon que nous aurons ces résultats remarquables:

$$(1)\qquad \left(D_\rho\, \Pi^{\nu,\rho}(x)\right)_{\rho=\nu+1} = -\frac{\pi}{2}\, Z^{\nu}(x),$$

et plus généralement, en désignant par n un nombre entier quelconque:

$$(2)\qquad \left(D_\rho\, \Pi^{\nu,\rho}(x)\right)_{\rho=\nu+2n+1} = -(-1)^n \frac{\pi}{2}\, Z^{\nu,n}(x).$$

Désignons constamment par n un entier non négatif, nous aurons, en appliquant les formules fondamentales de la théorie de $\Gamma(x)$ enumérées au § 1:

$$(3)\qquad 2\left(D_\rho\, \Pi^{\nu,\rho}(x)\right)_{\rho=\nu-2n} = \pi\cdot L^{\nu,n}(x),$$

où l'on a posé pour abréger:

$$(4)\left\{\begin{aligned} \pi\cdot L^{\nu,n}(x) = {} & 2J^{\nu}(x)\log\frac{x}{2} - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)}\left(\psi(s+1)+\psi(\nu+s+1)\right) + \\ & + \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(n-s-1)!}{\Gamma(\nu-n+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-n+2s}, \end{aligned}\right.$$

fonction qui représente une généralisation de la fonction cylindrique de deuxième espèce et de paramètre entier. En effet, désignons par p un nombre entier égal à n au plus, nous aurons, en vertu de (4) et de (3) § 1:

$$(5)\qquad L^{p,n}(x) = Y^{p}(x),\quad p \leqq n,$$

tandis que nous aurons pour $p > n$:

$$(6)\qquad L^{p,n}(x) = Y^{p}(x) + \sum_{s=0}^{s=p-n-1} \frac{(p-s-1)!}{s!}\left(\frac{2}{x}\right)^{p-2s}.$$

Nous avons de même, n étant encore un nombre entier non négatif:

$$(7) \quad 2\left(D_\rho \Pi^{\nu,\rho}(x)\right)_{\rho=-\nu-2n} = \pi \cos \nu\pi \cdot L^{-\nu, n}(x) + \pi \sin \nu\pi \cdot J^{-\nu}(x).$$

Dans cette occasion, nous avons encore à étudier cette fonction transcendante entière de ses deux variables x et ν:

$$(8) \qquad \Omega^{\nu}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x \sin\varphi - \nu\varphi)\, d\varphi;$$

nous aurons généralement:

$$(9) \qquad \Omega^{\nu}(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left(\cos \nu\pi \cdot \Psi^{\nu}(x) - \Psi^{-\nu}(x)\right),$$

formule qui est due à CAUCHY[1]; elle montre clairement que $\Omega^{\nu}(x)$ ne définit une fonction nouvelle que dans le cas particulier où ν est égal à un entier. Introduisons maintenant dans (9) les deux fonctions $\Pi^{\nu}(x)$ et $X^{\nu}(x)$, nous obtiendrons ces deux expressions pour la fonction nouvelle susdite:

$$(10) \qquad \Omega^{2n}(x) = (-1)^n \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1}}{\Gamma(s+n+\frac{3}{2})\,\Gamma(s-n+\frac{3}{2})},$$

$$(11) \qquad \Omega^{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{\Gamma(s+n+\frac{3}{2})\,\Gamma(s-n+\frac{1}{2})},$$

ce qui donnera, en vertu de (12) § 5:

$$(12) \qquad (-1)^n \cdot Z^{2n, -n}(x) = \Omega^{2n}(x),$$

$$(13) \qquad (-1)^{n+1} \cdot Z^{2n+1, -n-1}(x) = \Omega^{2n+1}(x),$$

formules qui nous seront très utiles par la suite.

§ 7. Intégration complète d'une certaine équation linéaire non homogène du second ordre.

Montrons maintenant que la fonction $\Pi^{\nu,\rho}(x)$ peut nous fournir un moyen simple pour trouver l'intégrale complète de

[1] Comptes rendus, t. XXXIX, p. 131; 1854.

cette équation différentielle linéaire mais non homogène du second ordre:

$$(1) \qquad x^2 y^{(2)} + x y^{(1)} + (x^2 - \nu^2) y = x^\rho,$$

intégrale qui nous sera indispensable dans nos recherches suivantes. A cet égard, remarquons qu'il suffit évidemment de connaître une intégrale particulière de (1), car l'équation homogène correspondante n'est autre chose que l'équation de Bessel.

Or, un calcul direct montre clairement que $\Pi^{\nu,\rho}(x)$ est intégrale particulière de cette équation analogue à (1):

$$(2) \qquad y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = \frac{\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\rho)}{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho-2}.$$

Désignons maintenant par $A^{\nu,\rho}(x)$ l'intégrale particulière susdite, nous aurons généralement:

$$(3) \qquad A^{\nu,\rho}(x) = \frac{2^{\rho-2}\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\rho)}\,\Pi^{\nu,\rho}(x),$$

expression qu'il faut modifier dans les cas particuliers suivants:

1° $\rho = \pm\nu + 2n$, n étant un positif entier; nous aurons, en vertu de (7) § 5:

$$(4) \qquad A^{\nu,\pm\nu+2n}(x) = -2^{\pm\nu+2n-2}(n-1)!\,\Gamma(\pm\nu+n)\,\mathfrak{B}^{\pm\nu,n}(x),$$

expression qui est valable aussi si nous supposons $\pm\nu+n$ égal à un entier non positif.

2° $\rho = \pm\nu + 2n + 1$, n désignant un nombre entier quelconque. Les formules (11) § 5 et (2) § 6 donnent aisément:

$$(5) \qquad A^{\nu,\pm\nu+2n+1}(x) = 2^{\pm\nu+2n-1}\Gamma(n+\tfrac{1}{2})\,\Gamma(n\pm\nu+\tfrac{1}{2})\,Z^{\pm\nu,n}(x),$$

expression qui n'est pas applicable dans le cas particulier où $n\pm\nu+\frac{1}{2}$ est égal à un entier non positif; cependant ce cas n'est autre chose qu'un cas particulier du suivant:

3° $\rho = \pm\nu - 2n$, n étant un entier non négatif. Dans ce cas il faut d'abord différentier par rapport à ρ l'équation différentielle (2), puis introduire la valeur particulière susdite; nous aurons:

$$A^{\nu, \pm\nu-2n}(x) = \frac{\Gamma(\pm\nu - n)}{n!\, 2^{2n\mp\nu+2}} \cdot \pi \cdot L^{\pm\nu, n}(x). \tag{6}$$

Posons $\pm\nu = -n - p - \frac{1}{2}$, p étant un nombre entier non positif, nous retrouvons le cas exclu au n° 2. Or, la forme même de notre intégrale particulière (6) montre clairement qu'il faut examiner séparément le cas où $\pm\nu - n$ est égal à zéro ou à un entier négatif $-p$:

4° $\pm\nu = n - p$. Dans ce cas il faut revenir à l'équation obtenue en différentiant par rapport à ρ l'équation (2) et en posant ensuite $\rho = \nu - 2n$, savoir l'équation:

$$y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = \frac{n!}{\Gamma(\nu - n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-2n-2}, \tag{7}$$

qui admet comme intégrale particulière la fonction $\pi \cdot L^{\nu, n}(x)$. Dans le cas actuel il faut différentier également par rapport à ν notre équation (7), ce qui donnera, en vertu de (5) § 6:

$$A^{n-p, -n-p}(x) = \frac{(-1)^p \cdot \pi \cdot P^{n, p}(x)}{n!\, p!\, 2^{n+p+2}}, \tag{8}$$

où l'on a posé pour abréger:

$$P^{n, p}(x) = \left(D_\nu L^{\nu, n}(x) - D_\nu Y^\nu(x)\right)_{\nu = n-p}. \tag{9}$$

Après avoir trouvé l'intégrale complète de notre équation proposée (1) nous nous bornerons à appliquer les résultats ainsi obtenus à la démonstration d'un théorème relatif aux fonctions cylindriques, théorème que nous croyons nouveau.

Chapitre III.

Équations linéaires intégrables à l'aide des fonctions cylindriques.

§ 8. *Transformation de l'équation de Bessel.*

Pour donner l'application susdite des résultats du chapitre précédent, supposons que $F(x)$ soit une intégrale quelconque de cette équation linéaire non homogène:

$$(1) \qquad F^{(2)}(x)+\frac{1}{x}F^{(1)}(x)+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)F(x)=f(x),$$

où $f(x)$ désigne une fonction donnée. Une simple transformation de la variable indépendante montrera que la fonction

$$z=F(\beta x^\gamma)$$

doit satisfaire à cette équation déduite de (1):

$$(\alpha) \quad z^{(2)}+\frac{1}{x}z^{(1)}+\left(\beta^2\gamma^2x^{2\gamma-2}-\frac{\nu^2\gamma^2}{x^2}\right)z=\beta^2\gamma^2x^{2\gamma-2}\cdot f(\beta x^\gamma).$$

Posons encore

$$z=x^{-\alpha}y;$$

nous verrons que la fonction

$$(2) \qquad y=x^\alpha F(\beta x^\gamma)$$

satisfait à cette équation encore plus générale:

$$(3) \quad \begin{cases} y^{(2)}+\dfrac{1-2\alpha}{x}y^{(1)}+\left(\beta^2\gamma^2x^{2\gamma-2}+\dfrac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{x^2}\right)y= \\ \qquad =\beta^2\gamma^2x^{\alpha+2\gamma-2}\cdot f(\beta x^\gamma). \end{cases}$$

Considérons en particulier le cas où $f(x)$ est égal à zéro, nous verrons que l'intégrale complète de l'équation homogène qui correspond à (3) se présente toujours sous la forme:

$$(4) \qquad y=x^\alpha\left(c_1J^\nu(\beta x^\gamma)+c_2Y^\nu(\beta x^\gamma)\right),$$

où c_1 et c_2 désignent deux constantes arbitraires par rapport à x. Ce résultat essentiel dans les recherches qui nous occupent ici est dû à LOMMEL [1].

Posons encore dans (3)

$$y = e^{-\sigma x^{\rho}} \cdot t,$$

nous aurons pour t l'équation linéaire suivante:

$$t^{(2)} + \left(\frac{1-2\alpha}{x} - 2\sigma\rho x^{\rho-1}\right) t^{(1)} + \left(\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} + \sigma^2\rho^2 x^{2\rho-2} + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{x^2} + \right.$$
$$\left. + (2\alpha - \rho)\sigma\rho x^{\rho-2}\right) t = \beta^2\gamma^2 x^{\alpha+2\gamma-2} \cdot e^{\sigma x^{\rho}} \cdot f(\beta x^{\gamma}),$$

dont la forme même nous conduira naturellement à poser:

$$\rho = \gamma, \quad \sigma = i\beta;$$

de cette manière nous verrons que la fonction

$$y = x^{\alpha} e^{i\beta x^{\gamma}} F(\beta x^{\gamma}) \tag{5}$$

est intégrale particulière de l'équation linéaire non homogène

$$\text{(6)} \quad \left\{ \begin{aligned} & y^{(2)} + \left(\frac{1-2\alpha}{x} - 2i\beta\gamma x^{\gamma-1}\right) y^{(1)} + \left(\frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{x^2} - i\beta\gamma(\gamma - 2\alpha) x^{2\gamma-2}\right) y = \\ & \qquad = \beta^2\gamma^2 x^{\alpha+2\gamma-2} e^{i\beta x^{\gamma}} f(\beta x^{\gamma}). \end{aligned} \right.$$

Cela posé, on voit immédiatement que l'intégrale complète de l'équation homogène correspondante s'écrira sous cette forme:

$$y = x^{\alpha} e^{i\beta x^{\gamma}} \left(c_1 J^{\nu}(\beta x^{\gamma}) + c_2 Y^{\nu}(\beta x^{\gamma})\right), \tag{7}$$

résultat qui nous sera bientôt très utile.

§ 9. *Équations linéaires d'ordre supérieur intégrables à l'aide des fonctions cylindriques.*

Choisissons maintenant pour la fonction donnée $f(x)$ la puissance $x^{\rho-2}$, et posons pour abréger:

[1] Mathematische Annalen, t. III, p. 478; 1871.

$$v(y) \equiv y^{(2)} + \frac{1-2\alpha}{x} y^{(1)} + \left(\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} + \frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{x^2}\right) y,$$

$$V(y) \equiv v(y) - \gamma^2\beta^\rho x^{\alpha+\rho\gamma-2};$$

nous aurons, en différentiant plusieurs fois par rapport à x l'équation (3) § 8, ou bien l'équation

$$V(y) = 0,$$

cette autre équation d'ordre $n+2$, où les a désignent des coefficients indépendants de x:

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_{s=0}^{s=n} \frac{a_s}{x^s} V^{(s)}(y) \equiv \\ \equiv \sum_{s=0}^{s=n} \frac{a_s}{x^s} v^{(s)}(y) - \beta^\rho \gamma^2 G(\alpha+\rho\gamma-2) x^{\alpha+\rho\gamma-n-2} = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé pour abréger

$$(2) \qquad G(k) = a_n + \sum_{s=1}^{s=n} a_{n-s} k(k-1)\ldots(k-s+1),$$

et où $V^{(s)}(y)$ et $v^{(s)}(y)$ désignent les fonctions obtenues en différentiant s fois par rapport à x les deux fonctions $V(y)$ et $v(y)$ respectivement.

De cette manière nous venons de démontrer la proposition suivante:

L'intégrale complète de l'équation non homogène (1) *peut être obtenue à l'aide de celle de l'équation homogène correspondante en y ajoutant la fonction* $x^\alpha A^{\nu,\rho}(\beta x^\gamma)$.

De même, nous démontrerons aisément aussi cette autre proposition:

Supposons que les racines de l'équation algébrique

$$(3) \qquad G(k) = 0$$

soient des quantités différentes

$$\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \ldots \ \alpha_n \,,$$

l'intégrale complète de (1) *se présente sous cette forme:*

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} y = x^{a} A^{\nu,\rho}(\beta x^{\gamma}) + x^{a}\big(c_1 J^{\nu}(\beta x^{\gamma}) + c_2 Y^{\nu}(\beta x^{\gamma})\big) + \\ + x^{a} \sum_{s=1}^{s=n} c_{s+2} A^{\nu,\rho_s}(\beta x^{\gamma}) \,, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé pour abréger

$$\rho_s = \frac{\alpha_s - a + 2}{\gamma} .$$

Considérons maintenant le cas particulier où les racines de l'équation (3) se présentent sous cette forme

$$\alpha_s = \alpha_1 + p_s d \,,$$

où les p_s sont des nombres entiers, tandis que $2\gamma = d$; nous verrons que la dernière somme figurant au second membre de (4) se réduit à une somme de la fonction transcendante $A^{\nu,\rho_1}(\beta x^{\gamma})$ et de $n-1$ séries finies.

Posons encore:

$$\frac{\alpha_1 - a + 2}{d} = \pm \frac{\nu}{2} + m \,,$$

où m désigne un positif entier, la somme susdite se réduit, en vertu de (4) § 7, à une somme de n séries finies.

Cela posé, l'hypothèse $\alpha_1 = 0$, $p_s = 1$, $d = 1$ nous donne cette autre proposition:

Différentions n fois par rapport à x l'équation de Bessel obtenue pour la fonction

$$x^{-m+2\mp\frac{\nu}{2}} C^{\nu}(\sqrt{x}) \,,$$

le système fondamental d'intégrales de l'équation linéaire d'ordre

$n+2$ ainsi obtenue se compose, outre des deux fonctions cylindriques, de n séries finies.

On voit que ces résultats s'accordent bien avec les théorèmes généraux relatifs aux équations différentielles linéaires non homogènes donnés par MM. Fuchs[1] et Frobenius[2].

---

[1] Journal de Crelle, t. LXVI, LXVIII.
[2] Journal de Crelle, t. LXXIV.

Deuxième Partie.

Représentations asymptotiques d'une fonction cylindrique.

Chapitre IV.

Séries asymptotiques obtenues pour $J^{\nu}(x)$ et $Y^{\nu}(x)$.

§ 10. *Évaluation nouvelle des intégrales d'Hankel.*

Certainement HANKEL[1] a étudié le premier des cas particuliers, mais d'une portée assez étendue, de cette intégrale définie, où le chemin d'intégration est l'axe des nombres positifs:

$$U_{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-ax}(1+ay)^{\nu-\frac{1}{2}} a^{\nu-\frac{1}{2}}\, da, \tag{1}$$

intégrale qui est absolument convergente, même pour des valeurs négatives de y, pourvu que l'on ait:

$$\Re(x) > 0, \quad \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2}; \tag{2}$$

dans le cas particulier $\Re(x) = 0$ il faut admettre aussi $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$.

Supposons maintenant $\Re(x) > 0$, notre intégrale (1) est absolument convergente et c'est la même chose pour les intégrales obtenues en différentiant par rapport à x sous le signe d'intégration. Cela posé, appliquons l'identité:

$$a^2 = \frac{a}{y}(1+ay) - \frac{a}{y},$$

nous aurons cette première formule, où les dérivations doivent être effectuées par rapport à x:

$$U_{\nu}^{(2)} = \frac{1}{y} U_{\nu}^{(1)} + \frac{1}{y} U_{\nu+1}. \tag{3}$$

[1] Mathematische Annalen, t. I, p. 491; 1869.

Or, une intégration par parties donnera immédiatement, en vertu de (1)

$$(4)\qquad U_{\nu+1} = \frac{2\nu+1}{2x} U_\nu - \frac{(2\nu+1)y}{x} U_\nu^{(1)},$$

de façon que (3) montre que notre fonction U_ν doit satisfaire à cette équation différentielle linéaire du second ordre:

$$(5)\qquad U_\nu^{(2)} + \left(\frac{2\nu+1}{x} - \frac{1}{y}\right) U_\nu^{(1)} - \frac{2\nu+1}{2xy} U_\nu = 0,$$

d'où, en vertu de (6) (7) § 8:

$$(6)\qquad U_\nu = x^{-\nu} e^{\frac{x}{2y}} \left(c_1' J^\nu\left(\frac{xi}{2y}\right) + c_2' Y^\nu\left(\frac{xi}{2y}\right)\right),$$

où c_1' et c_2' désignent deux constantes indépendantes de x, et où l'on a posé

$$i = e^{\frac{\pi i}{2}}.$$

Supposons maintenant pour un instant que y soit une quantité positive, puis mettons dans (1) ay au lieu de a, nous aurons immédiatement:

$$y^{\nu+\frac{1}{2}} U_\nu = f\left(\frac{x}{y}\right),$$

où le second membre est une fonction seulement de l'argument $\frac{x}{y}$.

Cela posé, l'équation (6) s'écrira sous cette forme plus commode:

$$(7)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}(1+ay)^{\nu-\frac{1}{2}} a^{\nu-\frac{1}{2}} da = \frac{x^{-\nu} e^{\frac{x}{2y}}}{\sqrt{y}} \left(c_1 J^\nu\left(\frac{xi}{2y}\right) + c_2 Y^\nu\left(\frac{xi}{2y}\right)\right),$$

où les coefficients c_1 et c_2 sont *indépendants et de x et de y.*

On voit qu'il faut admettre généralement dans (7) $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$, $\Re(x) > 0$, tandis que y peut être une quantité finie quelconque différente de zéro, même une quantité négative réelle.

Dans le cas particulier $\Re(x) = 0$, il faut avoir au contraire $-\frac{1}{2} < \Re(\nu) < \frac{1}{2}$.

Supposons maintenant que deux des variables susdites ayont des valeurs *fixes* qui satisfont aux conditions susdites mais étant du reste complètement arbitraires, il est évident que notre intégrale définie (7) représente une fonction de la troisième variable holomorphe dans tout le domaine déterminé par les conditions susdites qui doivent être satisfaites par cette troisième variable.

Ces remarques faites, il est aisé de déterminer les deux constantes d'intégration c_1 et c_2 étant des fonctions de ν, inconnues pour l'instant mais indépendantes et de x et de y.

En premier lieu, supposons $x = 0$, $y > 0$, notre intégrale exige $-\frac{1}{2} < \Re(\nu) < 0$. Posons ensuite $ay = \operatorname{tg}^2 \varphi$, le premier membre de (7) se réduit à une fonction beta, de façon que nous aurons, en vertu de la définition de $Y^\nu(x)$, cette première équation

$$(8) \qquad c_1 \sin \nu\pi + c_2 \cos \nu\pi = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma(\nu + \tfrac{1}{2}) e^{\frac{\nu\pi i}{2}},$$

car la fonction $J^{-\nu}(x)$ figurant dans $Y^\nu(x)$ s'évanouira.

On voit que l'équation (8) n'est démontrée pour l'instant que si $-\frac{1}{2} < \Re(\nu) < 0$. Or, d'après nos remarques précédentes, les deux membres de (8) représentent des fonctions de ν, holomorphes, pourvu que $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ et que l'integrale ait un sens; c'est-à-dire que (8) est valable aussi dans ce cas plus général.

En second lieu, supposons pour un instant $x > 0$, mettons ax au lieu de a, notre formule (8) se transforme en celle-ci:

$$\int_0^\infty e^{-a} (x + ay)^{\nu - \frac{1}{2}} a^{\nu - \frac{1}{2}} da = \frac{x^\nu e^{\frac{x}{2y}}}{\sqrt{y}} \left(c_1 J^\nu \left(\frac{xi}{2y} \right) + c_2 Y^\nu \left(\frac{xi}{2y} \right) \right);$$

puis posons $x = 0$, ce qui exige $\Re(\nu) > 0$, nous aurons de même, en vertu de la définition intégrale de la fonction gamma, cette autre équation:

$$(9) \qquad c_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\,e^{\frac{\nu\pi i}{2}}.$$

Cela posé, nous verrons de même que cette équation est valable aussi dans tous les cas où notre intégrale (7) a un sens; c'est-à-dire que nous avons finalement:

$$(10) \qquad \int_0^\infty e^{-ax}(1+ay)^{\nu-\frac{1}{2}}a^{\nu-\frac{1}{2}}da = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,e^{\frac{x}{2y}+\frac{\nu+1}{2}\pi i}}{2\,x^\nu\sqrt{y}}\,H_1^\nu\left(\frac{xi}{2y}\right),$$

formule qui est essentielle dans les recherches qui nous occupent ici. Remplaçons maintenant dans (10) y par $ye^{-\pi i}$, nous aurons, en vertu de (5) § 4:

$$(11) \qquad \int_0^\infty e^{-ax}(1-ay)^{\nu-\frac{1}{2}}a^{\nu-\frac{1}{2}}da = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,e^{-\frac{x}{2y}-\frac{\nu}{2}\pi i}}{2\,x^\nu\sqrt{y}}\,H_2^\nu\left(\frac{xi}{2y}\right),$$

formule qui est analogue à (10).

Posons dans (10), (11) $y = \frac{i}{2}$, nous retrouvons les formules d'Hankel[1]. Or, l'introduction de cette variable nouvelle y rend beaucoup plus flexibles nos deux formules susdites, de façon que nous pouvons écarter immédiatement, comme nous le verrons au paragraphe suivant, les difficultés considérables qui se sont présentées à Hankel dans ses recherches sur les séries asymptotiques obtenues pour $J^\nu(x)$ et $Y^\nu(x)$.

§ 11. *Séries asymptotiques trouvées pour $J^\nu(x)$ et $Y^\nu(x)$.*

Avant de donner l'application la plus importante de (10), (11) § 10, nous avons à faire une remarque essentielle relative à ces deux formules. En réalité, il est évident que les formules susdites, prises ensemble, ne peuvent représenter les

[1] Mathematische Annalen, t. I, p. 491; 1869.

deux fonctions H que dans un demi-plan limité par l'axe des nombres imaginairs. En effet, faisons parcourir la variable $\frac{xi}{2y}$ une demi-droite passant de l'origine à l'infini, la formule (11) n'est autre chose que (10) si nous faisons parcourir la variable susdite la demi-droite opposée, et inversement. De plus, les deux fonctions figurant dans (10), (11) § 10 sont continues par rapport aux variables x et y.

Pour le moment on ignore complètement quel est le demi-plan susdit. Or, supposons $\frac{x}{y}$ positif et ν réel, les deux membres de (10) § 10 deviendront réels; c'est-à-dire que *notre demi-plan est celui qui est situé à droite de l'axe des nombres imaginairs.*

Supposons maintenant que $x = re^{\varphi i}$ soit un point situé dans le demi-plan susdit et non dans l'axe des nombres imaginairs, nous aurons, en vertu de (10), (11) § 10, et après avoir posé $y = \frac{1}{2} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)i} = \frac{i}{2} \cdot e^{-\varphi i}$:

$$(1) \quad \int_0^\infty e^{-ar}\left(1 + \frac{ai}{2} e^{-\varphi i}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} a^{\nu - \frac{1}{2}} da = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{r^{\nu + \frac{1}{2}}} \cdot e^{-\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)i} \cdot H_1^\nu(x),$$

$$(2) \quad \int_0^\infty e^{-ar}\left(1 - \frac{ai}{2} e^{-\varphi i}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} a^{\nu - \frac{1}{2}} da = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{r^{\nu + \frac{1}{2}}} \cdot e^{\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)i} \cdot H_2^\nu(x).$$

Cela posé, mettons

$$\left(1 + \frac{ai}{2} e^{-\varphi i}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} = \Re(a) + i\,\Im(a),$$

où $\Re(a)$ et $\Im(a)$ désignent deux fonctions réelles de la variable réelle a; nous avons, en appliquant la série de TAYLOR:

$$(3) \quad \Re(a) + i\,\Im(a) = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{\nu - s - \frac{1}{2}}{s} \left(\frac{ai}{2}\right)^s e^{-s\varphi i} + R_n,$$

où l'on a posé pour abréger:

$$(4) \qquad R_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\left(\Re^{(n+1)}(\theta a) + i\,\Im^{(n+1)}(\theta' a)\right),$$

θ et θ' désignant deux quantités positives situées entre 0 et 1. Substituons maintenant dans l'intégrale figurant au premier membre de (1) l'expression (3), nous aurons, en désignant par $f(x)$ cette intégrale:

$$(5) \quad f(x) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{r^{\nu+\frac{1}{2}}}\left(P_n(x) + i\,Q_n(x)\right) + \int_0^\infty e^{-ar} R_n(a)\, a^{\nu-\frac{1}{2}}\, da,$$

où l'on a posé pour abréger:

$$(6) \quad P_n(x) = 1 + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s}{(2s)!} \cdot \frac{\left(\nu^2 - \frac{1^2}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{3^2}{4}\right)\cdots\left(\nu^2 - \frac{(2s-1)^2}{4}\right)}{(2x)^{2s}},$$

$$(7) \quad Q_n(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} \cdot \frac{\left(\nu^2 - \frac{1^2}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{3^2}{4}\right)\cdots\left(\nu^2 - \frac{(2s+1)^2}{4}\right)}{(2x)^{2s+1}}.$$

Faisons maintenant croître à l'infini le positif entier n, on voit que les fonctions $P_\infty\left(\frac{1}{x}\right)$ et $Q_\infty\left(\frac{1}{x}\right)$ se présentent généralement sous forme de deux séries de puissances du rayon de convergence zéro; c'est-à-dire que le second membre de (5) deviendra illusoire. Or, pour que la formule (5) nous représente asymptotiquement la fonction $f(x)$ il faut, d'après M. Poincaré[1], qu'il soit possible de déterminer une valeur X de $|x|$ aussi grande que

$$(8) \qquad \left| x^n R_n' \right| = \left| x^n \int_0^\infty e^{-ar} R_n(a)\, a^{\nu-\frac{1}{2}}\, da \right| < \varepsilon, \qquad |x| \geqq X,$$

où ε désigne une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut. Or, on aura immédiatement:

$$R_n' \leqq \frac{1}{(n+1)!\, r^{n+1}} \int_0^\infty e^{-a}\left(1 + \frac{a}{2r}\right)^{\Re(\nu)-n-1} a^{n+\frac{1}{2}+\Re(\nu)}\, da,$$

ce qui démontre facilement l'inégalité (8).

[1] Acta Mathematica, t. VIII, p. 292; 1886.

La formule (2) peut être traitée de la même manière, de façon que nous avons ces deux séries asymptotiques dues à HANKEL[1]:

$$(9)\qquad H_1^\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{\left(x-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)i}\left(P_n(x)+i\,Q_n(x)\right),$$

$$(10)\qquad H_2^\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-\left(x-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)i}\left(P_n(x)-i\,Q_n(x)\right),$$

où les égalités $\sim$ doivent être comprises asymptotiquement.

Supposons maintenant dans (1) $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, les deux membres de cette formule sont réels, de façon que (9) garde sa validité dans ce cas aussi. Quant à (2), cette formule ne donne aucune série asymptotique, écrite sous cette forme. Or, posons dans (11) § 10 $x e^{i\theta}$ au lieu de x et $y = \frac{1}{2} e^{i\theta}$, où x est une quantité positive, tandis que θ désigne un angle réel situé entre $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, ces deux limites exclues; de cette manière nous aurons:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x e^{i\theta}}\left(1-\frac{\alpha}{2}e^{i\theta}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\alpha^{\nu-\frac{1}{2}}\,d\alpha = \sqrt{\frac{\pi x i}{2}}\cdot\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\left(x e^{i\theta}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\left(ix-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)i}\cdot H_2^\nu(xi),$$

formule qui montre clairement que (10) garde sa validité aussi dans ce cas.

Quant au paramètre ν, les formules (9), (10) ne sont démontrées que si l'on suppose $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$; or, les formules (2) § 3:

$$H_1^{-\nu}(x) = e^{\nu\pi i} H_1^\nu(x), \quad H_2^{-\nu}(x) = e^{-\nu\pi i} H_2^\nu(x)$$

montrent immédiatement que (9), (10) gardent leur validité pour une valeur finie quelconque de ν.

Cela posé, ajoutons, puis soustrayons, les formules (9), (10), nous trouvons ce théorème général:

Supposons que le paramètre ν soit une quantité finie mais quelconque du reste, supposons de plus $x = |x| e^{\varphi i}$ où

[1] Mathematische Annalen, t. I, p. 491—501; 1869.

$-\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq +\frac{\pi}{2}$, *nous aurons pour des valeurs très grandes de* $|x|$ *ces deux représentations asymptotiques:*

$$J^{\nu}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)P_n(x)-\sin\left(x-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)Q_n(x)\right], \tag{11}$$

$$Y^{\nu}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)P_n(x)+\cos\left(x-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)Q_n(x)\right]. \tag{12}$$

Pour toutes les autres valeurs de φ *nous avons à tirer les expressions asymptotiques de* (11), (12) *en appliquant* (1), (2) § 4.

Dans le cas où ν est la moitié d'un entier impair, les deux séries $P_\infty(x)$ et $Q_\infty(x)$ seront des séries finies et (11), (12) nous donnent précisément les expressions bien connues pour ces fonctions cylindriques, introduites par Poisson [1].

Généralement nous verrons que les formules de (9) à (12) ne nous présentent des séries asymptotiques, d'après la définition de M. Poincaré, que dans le cas particulier où x est positif. Cependant, dans tous les autres cas, les formules susdites nous indiquent comment se comportent les fonctions cylindriques pour des valeurs extrêmement grandes du module de leur argument.

§ 12. *Sur une intégrale de M. H. Weber.*

Pour donner une première application des expressions asymptotiques que nous venons d'obtenir, considérons cette intégrale due à M. H. Weber [2] et démontrée d'une manière très élémentaire par Hankel [3]:

$$\int_0^\infty J^{\nu}(\alpha)\,\alpha^{\rho}\,d\alpha = 2^{\rho}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\rho+1}{2}\right)}. \tag{1}$$

[1] Théorie mathématique de la chaleur, p. 161; Paris 1835.
[2] Journal de Crelle, t. LXIX, p. 231; 1868.
[3] Mathematische Annalen, t. VIII, p. 468; 1875.

L'expression asymptotique (11) § 11 montre clairement que notre intégrale (1) n'est convergente que si le chemin d'intégration est l'axe des nombres positifs, et pourvu que l'on ait de plus:

$$(2) \qquad \Re(\rho) < \tfrac{1}{2}, \quad \Re(\nu+\rho) > -1.$$

Cela posé, une simple application de la définition de $Y^\nu(x)$ nous donnera:

$$(\alpha) \qquad \int_0^\infty Y^\nu(\alpha)\alpha^\rho d\alpha = 2^\rho \cot\nu\pi \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\rho+1}{2}\right)} - \frac{2^\rho}{\sin\nu\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\rho-\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu-\rho}{2}\right)},$$

où il faut ajouter aux conditions précédentes cette autre:

$$(3) \qquad \Re(\rho-\nu) > -1.$$

Pour simplifier le second membre de (α), multiplions respectivement par $\Gamma\left(\frac{\rho-\nu+1}{2}\right)$ et par $\Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)$ les deux fractions aux numérateurs et aux dénominateurs, nous aurons, après un simple calcul, cette formule élégante:

$$(4) \qquad \int_0^\infty Y^\nu(\alpha)\alpha^\rho d\alpha = \frac{2^\rho}{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu+1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}(\rho-\nu),$$

qui semble être restée inaperçue jusqu'ici. Pour la symétrie, écrivons la formule (1) sous cette forme:

$$(5) \qquad \int_0^\infty J^\nu(\alpha)\alpha^\rho d\alpha = \frac{2^\rho}{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu+1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}(\rho-\nu).$$

Or, ces deux formules connues, on forme aisément une formule analogue contenant la fonction cylindrique générale $C^\nu(x)$. Supposons que cette fonction cylindrique soit une fonction *hankélienne*, nous aurons:

$$(6) \qquad \int_0^\infty H_1^\nu(\alpha)\alpha^\rho d\alpha = \frac{2^\rho}{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu+1}{2}\right) e^{\frac{\rho-\nu}{2}\pi i},$$

$$(7) \qquad \int_0^\infty H_2^\nu(\alpha)\alpha^\rho d\alpha = \frac{2^\rho}{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu+1}{2}\right) e^{-\frac{\rho-\nu}{2}\pi i},$$

formules que nous avons à généraliser beaucoup; du reste, elles sont valables, pourvu que l'on ait à la fois

$$(8)\qquad \Re(\rho) < \tfrac{1}{2}, \quad \Re(\rho \pm \nu) > -1.$$

§ 13. Généralisations de l'intégrale de M. Weber.

Considérons maintenant cette intégrale définie plus générale

$$\int_0^\infty H_2^\nu(\alpha x)\, \alpha^\rho d\alpha,$$

où x désigne une quantité positive, puis mettons αx au lieu de x, nous aurons, en vertu de (7) § 12, cette formule analogue:

$$(1)\qquad \int_0^\infty H_2^\nu(\alpha x)\, \alpha^\rho d\alpha = \frac{2^\rho}{\pi x^{\rho+1}}\, \Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho-\nu+1}{2}\right) e^{\frac{\nu-\rho}{2}\pi i}.$$

Or, supposons dans cette formule $\Re(-xi) > 0$, $\Re(\rho \pm \nu) > -1$, son premier membre représente une fonction holomorphe de x et c'est la même chose pour le second membre; c'est-à-dire que la formule susdite garde sa validité aussi dans ce cas beaucoup plus général.

Mettons encore dans (1)

$$-\alpha x i = \alpha x e^{-\frac{\pi i}{2}}$$

au lieu de x, nous aurons cette autre formule:

$$(2)\qquad \int_0^\infty H_2^\nu(-\alpha x i)\, \alpha^\rho d\alpha = \frac{2^\rho}{\pi x^{\rho+1}}\, \Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho-\nu+1}{2}\right) e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}$$

valable pourvu que l'on ait à la fois $\Re(x) > 0$, $\Re(\rho \pm \nu > -1$ et que le chemin d'intégration soit l'axe des nombres positifs.

Quant à l'autre fonction *hankélienne*, nous aurons de la même manière, en vertu de (6) § 12, cette autre formule analogue à (2):

$$(3)\qquad \int_0^\infty H_1^\nu(\alpha x i)\, \alpha^\rho d\alpha = \frac{2^\rho e^{-\frac{\nu+1}{2}\pi i}}{\pi x^{\rho+1}}\, \Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\rho-\nu+1}{2}\right),$$

valable aussi pourvu que $\Re(x) > 0$ et $\Re(\rho \pm \nu) > -1$.

Il est évident que les deux formules nouvelles (2), (3) jouent un rôle fondamental dans la théorie des fonctions cylindriques. Nous donnerons plus tard une telle application essentielle en trouvant une représentation asymptotique de la fonction $\Pi^{\nu,\rho}(x)$ de LOMMEL.

Chapitre V.

Sur des intégrales analogues à celles d'Hankel.

§ 14. Formules générales.

Les intégrales *hankéliennes* qui nous ont donné les séries asymptotiques des fontions cylindriques sont analogues à une classe d'intégrales définies beaucoup plus générales, savoir

$$\int_0^\infty \frac{C^\nu(ax)\, a^\rho}{(1+a)^\sigma}\, da,$$

où $C^\nu(x)$ désigne une fonction cylindrique générale. Cependant cette intégrale satisfait généralement à une équation différentielle linéaire et homogène du quatrième ordre; c'est-à-dire que notre intégrale générale susdite ne s'exprime pas à l'aide des fonctions cylindriques et de la fonction de LOMMEL. L'intégrale qui correspond à $\sigma = 1$ semble être réellement la seule qui ait cette propriété; c'est pourquoi nous avons à étudier ici cette intégrale particulière

$$(1) \qquad y = \int_0^\infty \frac{C^\nu(ax)\, a^\rho}{1+a}\, da.$$

Le chemin d'intégration est l'axe des nombres positifs; de plus x doit être réel généralement et en outre il faut que

$$(2) \qquad \Re(\rho) < \tfrac{3}{2}, \quad \Re(\rho \pm \nu) > -1.$$

Ces conditions peuvent être modifiées si la fonction cylindrique est de la troisième espèce.

On voit sur-le-champ que notre intégrale y satisfait *formellement* à cette équation linéaire non homogène du second ordre:

$$(3)\qquad y^{(2)}+\frac{1}{x}y^{(1)}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y = \frac{1}{x^{\rho+1}}\int_0^\infty C^\nu(\alpha)\alpha^\rho d\alpha-\frac{1}{x^{\rho+2}}\int_0^\infty C^\nu(\alpha)\alpha^{\rho+1}d\alpha.$$

Les intégrales définies figurant au second membre de (3) se déterminent à l'aide des formules (4), (5) § 12, de façon que l'équation différentielle connue pour la fonction de Lommel (2) § 7 donnera pour l'intégrale y une expression de la forme suivante:

$$(4)\qquad y = c_1 J^\nu(x)+c_2 Y^\nu(x)+A^{\rho,\nu}\Pi^{\nu,-\rho+1}(x)-A^{\rho+1,\nu}\Pi^{\nu,-\rho}(x),$$

où c_1 et c_2 désignent deux facteurs indépendants de x, tandis que nous avons posé pour abréger

$$(5)\qquad A^{\rho,\nu} = \frac{\pi b(\nu)\sin\frac{\pi}{2}(\rho-\nu)}{\cos\frac{\pi}{2}(\rho-\nu)\sin\pi(\rho+\nu)}+\frac{\pi a(\nu)}{\sin\pi(\rho+\nu)},$$

où les $a(\nu)$ et $b(\nu)$ désignent les deux fonctions arbitraires figurant dans la fonction cylindrique générale, savoir:

$$C^\nu(x) = a(\nu)J^\nu(x)+b(\nu)Y^\nu(x).$$

Cependant la formule (4) que nous n'avons démontrée que *formellement* exige des interprétations ultérieures. En effet, supposons d'abord que la fonction cylindrique figurant sous le signe d'intégration soit celle-ci:

$$C_1^\nu(x) = \big(a(\nu)+b(\nu)\cot\pi\nu\big)J^\nu(x),$$

il est possible de choisir des valeurs simultanées de ν et de ρ telles que l'intégrale proposée et les deux autres obtenues par différentiation répétée par rapport à x sous le signe d'intégration soient absolument convergentes, et voilà une démonstration rigoureuse de l'équation correspondante (4) dans tous les cas où ses deux membres représentent des fonctions holomorphes de x, ν et ρ.

On voit que l'integrale contenant cette autre fonction cylindrique

$$C_2^\nu(x) = -\frac{b(\nu)}{\sin\nu\pi} J^{-\nu}(x)$$

peut être traitée de la même manière et voilà finalement une démonstration rigoureuse de l'équation générale (4).

Pour déterminer ensuite les deux constantes inconnues c_1 et c_2, appliquons la méthode expliquée au § 10; c'est-à-dire supposons en premier lieu

$$-1 < \Re(\rho+\nu) < 0, \quad \Re(\nu) < 0,$$

puis multiplions par $x^{-\nu}$ les deux membres de (4), nous aurons, en posant $x = 0$:

$$(\alpha) \qquad c_1 + c_2 \cot\nu\pi = -\frac{\pi}{\sin\pi(\nu+\rho)}\left(a(\nu) + b(\nu)\cot\nu\pi\right).$$

Posons encore

$$-1 < \Re(\rho-\nu) < 0, \quad \Re(\nu) > 0,$$

nous aurons, après avoir multiplié par x^ν et posé ensuite $x = 0$, cette autre formule:

$$(6) \qquad c_2 = \frac{\pi b(\nu)}{\sin\pi(\nu-\rho)},$$

de façon que (α) donnera:

$$(7) \qquad c_1 = -\frac{\pi a(\nu)}{\sin\pi(\nu+\rho)} - \frac{2\pi b(\nu)\cos\nu\pi\cos\rho\pi}{\sin\pi(\nu+\rho)\sin\pi(\rho-\nu)},$$

et voilà la détermination complète de notre intégrale définie (1).

§ 15. Intégrales contenant $J^\nu(x)$.

On voit que les expressions obtenues pour les coefficients $A^{\nu,\rho}$, c_1 et c_2 se présentent sous une forme très élégante si nous posons $a(\nu) = 1$, $b(\nu) = 0$, ce qui donnera en effet cette formule remarquable:

$$(1)\qquad \int_0^\infty \frac{J^\nu(ax)\,a^\rho}{1+a}\,da = \frac{\pi}{\sin\pi(\nu+\rho)}\Big(\Pi^{\nu,\,-\rho}(x)+\Pi^{\nu,\,-\rho+1}(x)-J^\nu(x)\Big),$$

valable, pourvu que l'on ait à la fois

$$(2)\qquad \Re(\rho)<\tfrac{3}{2},\quad \Re(\rho+\nu)>-1,$$

tandis que x désigne toujours une quantité positive.

Posons $\rho=0$, nous aurons cette formule intéressante:

$$(3)\qquad \int_0^\infty \frac{J^\nu(ax)}{1+a}\,da = \frac{\pi}{\sin\nu\pi}\big(\Psi^\nu(x)-J^\nu(x)\big),$$

valable pourvu que $\Re(\nu)>-1$; $\Psi^\nu(x)$ désigne la fonction d'Anger. Dans le cas où ν est égal à l'entier non négatif n, la formule (3) s'écrira sous cette forme, où $S^n(x)$ désigne le polynome de Schläfli introduit au § 1 formule (7):

$$(4)\qquad (-1)^n\int_0^\infty \frac{J^n(ax)}{1+a}\,da = \frac{\pi}{2}\big(\Omega^n(x)+S^n(x)-Y^n(x)\big).$$

Considérons maintenant le cas où $\rho=\nu+n$, n étant un nombre entier, nous aurons, en vertu de (2) § 6:

$$(5)\qquad (-1)^n\int_0^\infty \frac{J^\nu(ax)\,a^{\nu+n}}{1+a}\,da = \frac{\pi}{2\cos\nu\pi}\Big((-1)^{n'}Z^{-\nu,\,-n'}(x)-\sin\nu\pi\,J^\nu(x)\Big)-\frac{\pi}{2}Y^\nu(x),$$

où n' est égal à $\frac{n}{2}$ ou à $\frac{n+1}{2}$ selon que n est pair ou impair; la formule susdite est valable, pourvu que l'on ait à la fois

$$(6)\qquad -\frac{1}{2}-\frac{n}{2}<\Re(\nu)<\frac{3}{2}-n,$$

ce qui donnera $n\leqq 3$. La formule (5) est inapplicable dans le cas où $\nu=p+\frac{1}{2}$, p étant un nombre entier; or, on détermine aisément la vraie valeur du second membre. Posons encore $n=0$, nous aurons cette formule élégante:

$$(7)\quad \int_0^\infty \frac{J^\nu(ax)\,a^\nu}{1+a}\,da = \frac{\pi}{2\cos\nu\pi}\Big(Z^{-\nu}(x) - \sin\nu\pi\, J^\nu(x)\Big) - \frac{\pi}{2}\,Y^\nu(x),$$

qui est valable, pourvu que $-\frac{1}{2} < \Re(\nu) < \frac{3}{2}$.

Posons dans (4) $\nu = 0$, nous retrouvons la formule correspondante (7).

Quant à la formule (5), elle présente des particularités intéressantes. En effet, fixons une valeur déterminée de n, la formule (5) nous montre que ν doit être situé dans une bande limitée par deux droites perpendiculaires à l'axe des nombres réels et passant par les points $\left(\frac{3}{2}-n, 0\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}, 0\right)$ respectivement. Or, pour des valeurs entières de ν situées hors de la bande susdite, l'intégrale figurant au premier membre de (5) a un sens, et c'est généralement la même chose pour le second membre de (5). Néanmoins, la formule n'est pas applicable pour de telles valeurs de ν. Posons par exemple $\nu = -n$, l'intégrale (5) deviendra identique à (4), mais le second membre de (5) diffère de celui de (4) en manquant réellement de la fonction rationelle $S^n(x)$.

Ces remarques faites, nous avons encore à poser $\rho = n - \nu$, n étant un nombre entier, ce qui donnera, à l'aide du procédé ordinaire et en vertu des formules (2) (3) § 6:

$$(8)\quad (-1)^n \int_0^\infty \frac{J^\nu(ax)\,a^{n-\nu}}{1+a}\,da = \frac{\pi}{2}\Big((-1)^{n'} Z^{\nu,-n'}(x) + L^{\nu,n''}(x)\Big),$$

où l'on a posé pour abréger n' égal à $\frac{n}{2}$ ou à $\frac{n+1}{2}$ et n'' égal à $\frac{n}{2}$ ou à $\frac{n-1}{2}$ selon que n est pair ou impair. La formule (8) est valable, pourvu que l'on ait à la fois

$$(9)\qquad n \geqq 0, \quad R(\nu) > n - \tfrac{3}{2}.$$

Les formules traitées dans ce paragraphe ne sont applicables que si x est une quantité positive. Posons maintenant dans les intégrales en question ax au lieu de x, nous aurons

$$\int_0^\infty \frac{J^\nu(ax)\,a^\rho}{1+a}\,da = \frac{1}{x^\rho}\int_0^\infty \frac{J^\nu(a)\,da}{x+a}, \tag{10}$$

où l'intégrale figurant au second membre est applicable pour une valeur finie quelquonque de x, les valeurs réelles et négatives étant exclues.

Troisième Partie.

Représentation asymptotique de la fonction de Lommel.

Chapitre VI.

Généralisations d'une intégrale de M. Sonin.

§ 16. Formules générales.

Désignons constamment par $C^\nu(x)$ la fonction cylindrique générale, savoir

$$C^\nu(x) = a(\nu) J^\nu(x) + b(\nu) Y^\nu(x),$$

les expressions asymptotiques d'une telle fonction montrent clairement que cette intégrale définie

$$(1) \qquad V^{\nu,\rho}(x, y) = \int_0^\infty \frac{C^\nu(ax)\, a^{\nu+1}}{(a^2+y^2)^{\rho+1}}\, da,$$

prise le long de l'axe des nombres positifs, ne peut être convergente généralement que si l'on suppose x réel et en outre si l'on a à la fois

$$(2) \qquad \Re(2\rho) + \tfrac{3}{2} > \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2}.$$

Quant à y, cette variable peut avoir une valeur finie quelconque non purement imaginaire. Dans ce cas particulier, il faut ajouter aux conditions (2) cette autre

$$(3) \qquad \Re(\rho) < 0.$$

Cela posé, nous avons à déduire, à l'aide des méthodes expliquées aux §§ 10, 14, une suite de propriétés fondamentales de notre fonction $V^{\nu,\rho}(x, y)$.

En premier lieu, transformons l'intégrale susdite en posant $ax = \beta$, nous aurons cette autre formule:

$$(4) \qquad x^{\nu-2\rho} V^{\nu,\rho}(x, y) = \int_0^\infty \frac{C^\nu(\alpha)\alpha^{\nu+1}}{(\alpha^2 + x^2 y^2)^{\rho+1}} d\alpha;$$

c'est-à-dire que la fonction figurant au premier membre est une fonction du produit xy seulement.

Appliquons ensuite cette formule fondamentale des fonctions cylindriques

$$D_\alpha\left(\alpha^\nu C^\nu(\alpha x)\right) = x\alpha^\nu C^{\nu-1}(\alpha x),$$

qui est une conséquence immédiate de (1), (2) § 2; la formule (1) donnera, après une intégration par parties, cette autre formule fondamentale:

$$(5) \qquad V^{\nu,\rho}(x, y) = \frac{x}{2^\nu} V^{\nu-1,\rho-1}(x, y) - \frac{2^\nu b(\nu)\Gamma(\nu)}{2\nu\pi x^\nu y^{2\rho}},$$

valable pourvu que $\Re(\nu) > 0$. Puis, appliquons l'identité suivante:

$$\frac{\nu}{x} C^\nu(\alpha x) - D_x C^\nu(\alpha x) = \alpha C^{\nu+1}(\alpha x),$$

nous aurons de même, en vertu de (1):

$$(6) \qquad \frac{\nu}{x} V^{\nu,\rho}(x, y) - \frac{\partial V^{\nu,\rho}(x, y)}{\partial x} = V^{\nu+1,\rho}(x, y);$$

enfin, l'équation différentielle de Bessel donnera, après une légère modification:

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 V^{\nu,\rho}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial V^{\nu,\rho}(x, y)}{\partial x} - \left(y^2 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) V^{\nu,\rho}(x, y) = \\ &\qquad = -\int_0^\infty \frac{C^\nu(\alpha x)\alpha^{\nu+1}}{(\alpha^2 + y^2)^{\rho+1}} d\alpha, \end{aligned} \right.$$

de façon qu'une intégration par parties nous donne finalement cette équation différentielle linéaire non homogène du second ordre:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V^{\nu,\rho}(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{1-2\rho}{x} \cdot \dfrac{\partial V^{\nu,\rho}(x,y)}{\partial x} + \left(-y^2 + \dfrac{2\nu\rho-\nu^2}{x^2}\right) V^{\nu,\rho}(x,y) = \\ \qquad = -\dfrac{b(\nu)\,\Gamma(\nu)\,2^{\nu+1}}{\pi y^{2\rho} x^{\nu+2}}, \end{cases}$$

qui est un cas particulier de (3) § 8, de façon que nous aurons généralement une expression de cette forme:

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{C^\nu(\alpha x)\,\alpha^{\nu+1}}{(\alpha^2+y^2)^{\rho+1}}\,d\alpha = \\ = \dfrac{\pi x^\rho (iy)^{\nu-\rho}}{2^{\rho+1}\Gamma(\rho+1)} \left(c_1 J^{\nu-\rho}(xyi) + c_2 Y^{\nu-\rho}(xyi) + c_3 \Pi^{\nu-\rho,-\nu-\rho}(xyi)\right), \end{cases}$$

où Π est la fonction de LOMMEL, et où l'on a posé pour abréger:

$$(9)\qquad c_3 = -\frac{2b(\nu)\,i^{2\rho}}{\sin\rho\pi \sin 2\nu\pi},$$

tandis que nous avons à déterminer les deux autres constantes c_1 et c_2 indépendantes et de x et de y. A cet égard, divisons par x^ν les deux membres de (8), puis mettons $x = 0$, ce qui est permis, pourvu que

$$\Re(\nu) > 0, \quad \Re(\rho-\nu) > 0;$$

nous aurons de cette manière:

$$(\beta)\quad c_1 \sin(\nu-\rho)\pi + c_2 \cos(\nu-\rho)\pi = -\left(a(\nu) + b(\nu)\cot\nu\pi\right) e^{(\rho-\nu)\pi i}.$$

Pour trouver une autre équation entre c_1 et c_2, appliquons (4), puis posons $x = 0$, ce qui exige à la fois:

$$\Re(\nu) < 0, \quad \Re(\rho-\nu) < 0;$$

nous aurons, en vertu de (4), (5) § 12, pour c_2 cette expression:

$$(10)\qquad c_2 = -a(\nu) - b(\nu)\cot\rho\pi,$$

d'où, à l'aide de (β)

$$(11)\qquad c_1 = \left(a(\nu) + b(\nu)\cot\nu\pi\right)i + \frac{b(\nu)\cos(\nu-\rho)\pi}{\sin\nu\pi \sin\rho\pi},$$

et voilà la détermination complète de notre intégrale $V^{\nu,\rho}(x,y)$.

§ 17. *Évaluation nouvelle de quelques intégrales de M. Sonin.*

Considérons en particulier l'intégrale V dont la fonction cylindrique est de la première espèce; nous avons à poser $a(\nu) = 1$, $b(\nu) = 0$, ce qui donnera cette formule due à M. Sonin[1]:

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{J^\nu(ax)\, a^{\nu+1}}{(a^2+y^2)^{\rho+1}}\, da = \frac{\pi x^\rho y^{\nu-\rho} i^{\nu-\rho+1}}{2^{\rho+1}\Gamma(\rho+1)} H_1^{\nu-\rho}(xyi),$$

où $H_1^\nu(x)$ désigne la première fonction cylindrique *hankélienne*; cette formule est applicable pourvu que

$$\Re(\nu) > -\tfrac{1}{2}, \quad \Re(2\rho) + \tfrac{3}{2} > \Re(\nu).$$

Or, cette intégrale trouvée, on en déduira aisément quelques autres dues également à M. Sonin. En premier lieu, posons:

$$(2) \qquad U = \int_0^\infty \frac{J^\nu\left(x\sqrt{a^2+y^2}\right)}{(a^2+y^2)^{\frac{\nu}{2}}} \cdot \frac{J^\rho(az)\, a^{\rho+1}}{a^2+t^2}\, da,$$

intégrale dont la détermination selon la méthode de M. Sonin a offert des difficultés considérables à l'éminent géomètre russe[2].

Les expressions asymptotiques de $J^\nu(x)$ montrent que l'intégrale U a un sens si les variables x, z et y^2 sont réelles; quant à t, cette variable peut être une quantité finie quelconque, les valeurs purement imaginaires étant exclues. En outre, il faut que les deux paramètres ν et ρ satisfassent à ces deux conditions:

$$(3) \qquad \Re(\nu) + 2 > \Re(\rho) > -1.$$

On voit que notre intégrale U contient apparemment quatre variables indépendantes; or, posons $ax = \beta$, nous aurons:

[1] Mathematische Annalen, t. XVI, p. 50; 1880.
[2] loc. cit. p. 56—60.

$$(4) \qquad x^{\nu-\rho} U = \int_0^\infty \frac{J^\nu(\sqrt{a^2+x^2y^2})}{(a^2+x^2y^2)^{\frac{\nu}{2}}} \cdot \frac{J^\rho\left(a\cdot\frac{z}{x}\right)a^{\rho+1}}{a^2+x^2t^2}\, da,$$

de façon que la fonction figurant au premier membre de (4) n'est une fonction que des trois variables xy, xt et $\frac{z}{x}$.

Cela posé, appliquons cette formule remarquable due à M. SONIN[1]

$$\int_0^\infty \frac{J^\nu(x\sqrt{a^2+y^2})\, J^\rho(az)\, a^{\rho+1}}{(a^2+y^2)^{\frac{\nu}{2}}}\, da = 0, \quad x < z,$$

qui est une généralisation du célèbre facteur discontinu de DIRICHLET; nous verrons, en vertu de (1), que U, considéré comme fonction de x, doit satisfaire à cette équation différentielle:

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \left(y^2 - t^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) U = 0,$$

c'est-à-dire que notre intégrale susdite se présente sous cette forme:

$$(6) \qquad U = c_1 J^\nu(x\sqrt{y^2-t^2}) + c_2 Y^\nu(x\sqrt{y^2-t^2}),$$

où c_1 et c_2 sont indépendantes de x:

Pour déterminer ces deux coefficients, appliquons (4) en supposant $\Re(\rho) > 0$, $\Re(\rho - 2\nu) < 0$; nous verrons, en vertu des expressions asymptotiques de $J^\nu(x)$, que le second membre de cette formule s'évanouit avec x. Or, cela n'est possible pour le premier membre de (4) que si la fonction de deuxième espèce disparaît de (6) ou, ce qui revient au même que si $c_2 = 0$. Multiplions maintenant par $x^{-\nu}$ les deux membres de (6) ainsi modifiée, puis posons $x = 0$; le coefficient c_1 se détermine aisément à l'aide de (1) en y posant $\rho = 0$, ce qui donnera finalement la formule cherchée:

$$(7) \qquad \int_0^\infty \frac{J^\nu(x\sqrt{a^2+y^2})}{(a^2+y^2)^{\frac{\nu}{2}}} \cdot \frac{J^\rho(az)\, a^{\rho+1}}{a^2+t^2}\, da = \frac{\pi t^\rho i^{\rho+1}}{2(y^2-t^2)^{\frac{\nu}{2}}} J^\nu(x\sqrt{y^2-t^2}) H_1^\rho(zti);$$

[1] loc. cit. p. 38.

telle est notre évaluation nouvelle de l'intégrale ω_{18} de M. Sonin.

Du reste, cette formule élégante peut être très généralisée en appliquant simplement le calcul des résidus de Cauchy, c'est-à-dire en approfondissant une méthode expliquée dans quelques cas particuliers par Hankel[1].

Or, l'intégrale (7) trouvée, on déduira aisément quelques autres des intégrales remarquables que l'éminent géomètre russe a trouvées plus par des inspirations ingénieuses que par des méthodes rigoureuses et systématiques. En premier lieu, posons dans (7) $t = y$; nous aurons cette autre formule:

$$(8) \qquad \int_0^\infty \frac{J^\nu(x\sqrt{a^2+y^2})\, J^\rho(az)\, a^{\rho+1}}{(a^2+y^2)^{\frac{\nu}{2}+1}}\, da = \frac{\pi i^{\rho+1} x^\nu y^\rho}{2^{\nu+1}\,\Gamma(\nu+1)}\, H_1^\rho(yzi),$$

ce qui n'est autre chose que l'intégrale ω_{13} de M. Sonin[2]. Pour obtenir l'intégrale ω_{12} du même auteur[3], supposons $\Re(\rho) > 0$, puis faisons $t = 0$, et notre formule (7) donnera immédiatement cette autre:

$$(9) \qquad \int_0^\infty \frac{J^\nu(x\sqrt{a^2+y^2})\, J^\rho(az)\, a^{\rho-1}}{(a^2+y^2)^{\frac{\nu}{2}}}\, da = \frac{2^{\nu-1}\,\Gamma(\nu)}{y^\nu \cdot z^\rho}\, J^\nu(xy).$$

§ 18. *Cas particuliers où ν ou ρ est la moitié d'un entier.*

Il est évident que nos formules générales données au § 16 doivent être modifiées dans les cas particuliers où ν ou ρ est la moitié d'un nombre entier; une telle discussion peut être établie à l'aide des formules données aux §§ 5, 6.

En premier lieu supposons ρ égal au nombre entier non négatif q; notre fonction Π en question deviendra égale à $\cos\pi(\nu-q)\,J^{q-\nu}(x)$, ce qui nous conduira immédiatement à

[1] Mathematische Annalen, t. VIII, p. 458—467.
[2] loc. cit. p. 51.
[3] loc. cit. p. 49.

écrire la somme figurant au second membre de (8) sous la forme suivante:

$$c_1 J^{\nu-\rho} + c_2 Y^{\nu-\rho} + c_3 \cos\pi(\nu-\rho) J^{\rho-\nu} + \\ + c_3\left(\Pi^{\rho-\nu,\,-\nu-\rho} - \cos\pi(\nu-\rho) J^{\rho-\nu}\right);$$

c'est-à-dire qu'il s'agit maintenant de déterminer la vraie valeur de l'expression

$$\frac{\Pi^{\nu-\rho,\,-\nu-\rho} - \cos\pi(\nu-\rho) J^{\rho-\nu}}{\sin\rho\pi} \quad \text{pour } \rho = q,$$

de façon que le procédé ordinaire donnera immédiatement cette valeur limite égale à

$$-\sin\nu\pi\, J^{q-\nu} - \cos\nu\pi\, L^{q-\nu,\,q}.$$

Cela posé, appliquons encore la formule (4) § 1 pour la réduction à $J^\nu(x)$ et $Y^\nu(x)$ de la fonction $J^{-\nu}$; un simple calcul donnera la formule cherchée:

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{C^\nu(ax)\,a^{\nu+1}}{(a^2+y^2)^{q+1}}\,da = \\ \displaystyle = \frac{\pi x^q (iy)^{\nu-q}}{2^{q+1}\,q!}\left(c_1' J^{\nu-q}(xyi) + c_2' Y^{\nu-q}(xyi) + c_3' L^{q-\nu,\,q}(xyi)\right), \end{cases}$$

où l'on a posé pour abréger:

$$(2)\quad \begin{cases} c_1' = a(\nu)i + b(\nu), \quad c_2' = -a(\nu) - b(\nu)\cot\nu\pi + ib(\nu), \\ \displaystyle c_3' = \frac{(-1)^q b(\nu)}{\sin\nu\pi}. \end{cases}$$

Considérons maintenant notre formule (8) § 16 dans le cas particulier oú ν est égal à l'entier non négatif p, nous écrivons dans la parenthèse:

$$c_1 J^{\nu-\rho} + c_2 Y^{\nu-\rho} + c_3 J^{\nu-\rho} + c_3\left(\Pi^{\nu-\rho,\,-\nu-\rho} - J^{\nu-\rho}\right),$$

ce qui donnera aisément:

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{C^p(ax)\,a^{p+1}}{(a^2+y^2)^{\rho+1}}\,da = \\ \displaystyle = \frac{\pi x^\rho (yi)^{p-\rho}}{2^{\rho+1}\,\Gamma(\rho+1)}\Big(c_2'' J^{p-\rho}(xyi) + c_2'' Y^{p-\rho}(xyi) + c_3'' L^{\rho-p,\,p}(xyi)\Big), \end{cases}$$

où l'on a posé pour abréger, en désignant par a et b les valeurs de $a(\nu)$ et $b(\nu)$ indépendantes de la valeur entière de ν:

$$(4)\qquad c_1'' = ai+b,\quad c_2'' = -a-b\cot\rho\pi,\quad c_3'' = \frac{b\,e^{\rho\pi i}}{\sin\rho\pi}.$$

La formule (3) se présente sous une forme remarquable dans le cas où $\rho = r-\frac{1}{2}$, r étant un nombre entier, et où la fonction cylindrique est celle de deuxième espèce; nous aurons en effet:

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{Y^n(ax)\,a^{n+1}}{(a^2+y^2)^{r+\frac{1}{2}}}\,da = \\ \displaystyle = \frac{\pi x^{r+\frac{1}{2}}(iy)^{n-r+\frac{1}{2}}}{2^{r+\frac{1}{2}}\,\Gamma(r+\frac{1}{2})}\Big(J^{n-r+\frac{1}{2}}(xyi) + i\,L^{r-n-\frac{1}{2},\,n}(xyi)\Big). \end{cases}$$

Posons maintenant dans (1) $\nu = p$ ou bien dans (3) $\rho = q$, nous aurons cette autre formule:

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{C^p(ax)\,a^{p+1}}{(a^2+y^2)^{q+1}}\,da = \\ \displaystyle = \frac{\pi x^q (yi)^{p-q}}{2^{q+1}\cdot q!}\Big((ai+b)J^{p-q}(xyi) + (bi-a)Y^{p-q}(xyi) - bP^{p-q,\,q}(xyi)\Big). \end{cases}$$

Nous avons encore à étudier le cas particulier $\nu = n-\frac{1}{2}$, n étant un entier positif ou zéro; nous aurons immédiatement:

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_3^\infty \frac{C^{n-\frac{1}{2}}(ax)\,a^{n+\frac{1}{2}}}{(a^2+y^2)^{\rho+1}}\,da = \\ \displaystyle = \frac{\pi x^\rho (yi)^{n-\rho-\frac{1}{2}}}{2^{\rho+1}\,\Gamma(\rho+1)}\Big(c_1 J^{n-\rho-\frac{1}{2}}(xyi) + c_2 Y^{n-\rho-\frac{1}{2}}(xyi) + c_3 Z^{n-\rho-\frac{1}{2},\,-n}(xyi)\Big), \end{cases}$$

où l'on a posé pour abréger:

$$(8)\qquad c_1 = ai + b, \quad c_2 = -a - b\cot\rho\pi, \quad c_3 = -\frac{b\,e^{\rho\pi i}}{\sin\rho\pi}.$$

La formule (7) se présente sous une forme élégante si nous faisons $\rho = r - \frac{1}{2}$, r étant un entier aussi; nous aurons par exemple de cette manière:

$$(9)\qquad \int_0^\infty \frac{Y^{n-\frac{1}{2}}(ax)\,a^{n+\frac{1}{2}}}{(a^2+y^2)^{r+\frac{1}{2}}}\,da = \frac{\pi x^{r-\frac{1}{2}}(yi)^{n-r}}{2^{r+\frac{1}{2}}\Gamma(r+\frac{1}{2})}\Big(J^{n-r}(xyi) + i Z^{n-r,\,-n}(xyi)\Big),$$

formule qui est très élégante dans les deux cas particuliers $n = r$, $r = 0$. Posons $n = 0$, nous retrouvons des formules connues pour J et Z.

Chapitre VII.

Généralisations des intégrales de Mehler et de M. H. Weber.

§ 19. Nouvelles expressions intégrales pour la fonction de Lommel.

Les formules générales que nous venons d'étudier dans le chapitre précédent nous conduisent naturellement à remplacer y par $-iy$, où le dernier y désigne une quantité positive, ou, ce qui revient au même, à étudier ces deux intégrales définies, où le chemin d'intégration est la partie correspondante de l'axe des nombres positifs, savoir les deux intégrales:

$$(1)\qquad U^{\nu,\rho}(x,y) = \int_0^y \frac{C^\nu(ax)\,a^{\nu+1}}{(y^2-a^2)^{\rho+1}}\,da, \quad W^{\nu,\rho}(x,y) = \int_y^\infty \frac{C^\nu(ax)\,a^{\nu+1}}{(a^2-y^2)^{\rho+1}}\,da.$$

Pour trouver la valeur de ces deux intégrales, supposons dans la formule générale (8) § 16 que les quatre variables x, y, ν et ρ soient des quantités positives et que les deux fonctions $a(\nu)$ et $b(\nu)$ figurant dans $C^{\nu}(x)$ soient des fonctions réelles; l'identité

$$(2) \qquad V^{\nu,\rho}(x, -iy) = -e^{\rho\pi i} U^{\nu,\rho}(x, y) + W^{\nu,\rho}(x, y)$$

nous permettra de déterminer aisément nos deux intégrales U et W, en comparant séparément les parties réelles et les parties imaginaires. On voit que la demande des fonctions réelles pour des valeurs positives des variables ne peut être maintenue que si l'on prend la valeur susdite de $(-1)^{\rho+1}$ figurant au second membre de (2).

Or, nos deux nouvelles intégrales susdites étant trouvées pour des valeurs positives des variables, on voit, d'après un théorème fondamental de la théorie des fonctions analytiques, que les formules ainsi obtenues gardent leur validité, pourvu que les intégrales en question aient un sens. De même, les fonctions périodiques $a(\nu)$ et $b(\nu)$ peuvent être imaginaires aussi, car les formules précédentes nous permettent d'évaluer les intégrales contenant ou $J^{\nu}(x)$ ou $Y^{\nu}(x)$ seulement.

Considérons d'abord l'intégrale U, nous aurons, après avoir changé le signe de ρ et posé $y = 1$, $\alpha = \sin\varphi$:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} C^{\nu}(x\sin\varphi)\,(\sin\varphi)^{\nu+1}(\cos\varphi)^{2\rho-1}\,d\varphi \\ & = \frac{\Gamma(\rho)}{2^{1-\rho}x^{\rho}}\left(\big(a(\nu)+b(\nu)\cot\nu\pi\big)J^{\nu+\rho}(x) - \frac{2\,b(\nu)}{\sin 2\nu\pi}\,\Pi^{\nu-\rho,\,-\nu-\rho}(x)\right), \end{aligned} \right.$$

formule qui est valable pourvu que

$$\Re(\rho) > 0, \quad \Re(\nu) > -1,$$

tandis que x désigne une quantité finie quelconque différente de zéro. Notre formule (3) est une généralisation très étendue de celles qui représentent ou $J^{\nu}(x)$ ou $\Pi^{\nu,\rho}(x)$.

Posons dans (3) $\nu = n - \frac{1}{2}$, n étant un entier non négatif; posons encore $\rho + \frac{1}{2}$ au lieu de ρ, nous aurons:

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} C^{n-\frac{1}{2}}(x\sin\varphi)\,(\sin\varphi)^{n-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)^{2\rho}d\varphi \\ &= \frac{\Gamma(\rho+\frac{1}{2})}{2^{\frac{1}{2}-\rho}x^{\rho+\frac{1}{2}}}\left(a\,J^{\rho+n}(x)+b\,Z^{\rho,\,-n}(x)\right); \end{aligned} \right.$$

dans le cas particulier $n = 0$, on retrouve précisément les expressions intégrales très connues représentant J ou Z.

L'hypothèse $\nu = n$ donnera de même:

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} C^{n}(x\sin\varphi)\,(\sin\varphi)^{n+1}(\cos\varphi)^{2\rho-1}d\varphi \\ &= \frac{\Gamma(\rho)}{2^{1-\rho}x^{\rho}}\left(a\,J^{\rho+n}(x)+b\,L^{\rho+n,\,n}(x)\right), \end{aligned} \right.$$

d'où nous obtiendrons cette expression intégrale pour la fonction L:

$$(6)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} Y^{n}(x\sin\varphi)\,(\sin\varphi)^{n+1}(\cos\varphi)^{2\rho-1}d\varphi = \frac{\Gamma(\rho)2^{\rho-1}}{x^{\rho}}\,L^{\rho+n,\,n}(x).$$

§ 20. Généralisations des intégrales de Mehler et de M. Weber.

Quant à l'intégrale W, nous aurons cette formule générale:

$$(6)\quad (-1)^n\int_y^{\infty}\frac{C^{n-\frac{1}{2}}(ax)\,a^{n+\frac{1}{2}}}{(a^2-y^2)^{\rho+\frac{1}{2}}}\,da = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\rho)\,x^{\rho-\frac{1}{2}}y^{n-\rho}}{2^{\rho+\frac{1}{2}}}\left(b\,J^{\rho-n}(xy)-a\,Y^{\rho-n}(xy)\right)$$

dont le cas particulier $\rho = 0$, $b = 0$ appartient à M. SONIN[1]. Les fonctions *hankéliennes* donnent dans ce cas:

$$(7)\quad (-1)^{n+1+\omega}\int_y^{\infty}\frac{H_{\omega}^{n-\frac{1}{2}}(ax)\,a^{n+\frac{1}{2}}}{(a^2-y^2)^{\rho+\frac{1}{2}}}\,da = \frac{i\,\Gamma(\frac{1}{2}-\rho)\,x^{\rho-\frac{1}{2}}}{y^{\rho-n}2^{\rho+\frac{1}{2}}}\,H_{\omega}^{\rho-n}(xy).$$

Posons encore $n = 0$, $a = 0$ ou $b = 0$, nous aurons ces deux formules remarquables:

[1] Mathematische Annalen, t. XVI, p. 38; 1880.

$$(8) \qquad J^{\rho}(xy) = \frac{\left(\frac{2y}{x}\right)^{\rho}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}-\rho)} \cdot \int_y^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)\,d\alpha}{(\alpha^2-y^2)^{\rho+\frac{1}{2}}},$$

$$(9) \qquad Y^{\rho}(xy) = \frac{\left(\frac{2y}{x}\right)^{\rho}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}-\rho)} \cdot \int_y^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)\,d\alpha}{(\alpha^2-y^2)^{\rho+\frac{1}{2}}},$$

valables pourvu que x soit une quantité positive, tandis que

$$\tfrac{1}{2} > \Re(\rho) > -\tfrac{1}{2}.$$

Posons $\rho = 0$, la formule (8) appartient à Mehler[1], tandis que M. H. Weber[2] l'a publiée à peu près en même temps; pour $\rho = 0$, (9) appartient à M. H. Weber[3]. La forme de cette dernière formule chez M. Weber montre que sa définition de $Y^0(x)$ est assez différente de la nôtre; plus tard M. Weber[4] a introduit notre fonction Y.

La formule générale (8) a été donnée par M. Sonin[5] qui communique également (9) mais sous une forme détournée[6].

Chapitre VIII.

Série asymptotique obtenue pour la fonction de Lommel.

§ 21. Intégrales définies contenant les fonctions hankéliennes.

Les formules (5), (7) § 20 indiquent clairement que les fonctions cylindriques *hankéliennes* nous permettent de déduire une suite de formules remarquables en prenant pour point de départ les formules générales du chapitre VI.

[1] Mathematische Annalen, t. V, p. 143—144; 1872.

[2] Journal de Crelle, t. LXXV, p. 81; 1873.

[3] loc. cit. p. 85.

[4] Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik, t. I, p. 175; 1900.

[5] loc. cit. p. 39.

[6] loc. cit. p. 64.

Considérons d'abord l'intégrale générale qui contient la fonction $H_2^\nu(x)$, nous aurons, en vertu de (8) § 16, et après avoir posé $xe^{-\frac{\pi i}{2}} = -xi$ au lieu de x:

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{H_2^\nu(-axi)\,a^{\nu+1}}{(a^2+y^2)^{\rho+1}}\,da = \\ \displaystyle = \frac{\pi x^\rho y^{\nu-\rho} e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}}{2^{\rho+1}\Gamma(\rho+1)\sin\rho\pi}\left(-\cot\nu\pi\, J^{\nu-\rho}(xy) + Y^{\nu-\rho}(xy) + \frac{2}{\sin 2\nu\pi}\,\Pi^{\nu-\rho,\,-\nu-\rho}(xy)\right), \end{cases}$$

formule qui est valable, pourvu que

$$(2)\qquad \Re(x) > 0, \quad \Re(\nu) > -1,$$

ou bien

$$(3)\qquad \Re(x) = 0, \quad \Re(\nu) > -1, \quad \Re(\rho) > \Re(\nu - \tfrac{1}{2}).$$

Dans le cas particulier où y est purement imaginaire il faut ajouter aux conditions précédentes cette autre que $\Re(\rho)$ doit être négatif.

Posons maintenant dans (1) $\rho = -n$, n étant un positif entier, nous aurons, en vertu de (7) § 5, cette formule remarquable:

$$(4)\qquad (-1)^n \int_0^\infty \frac{H_2^\nu(-axi)\,a^{\nu+1}}{(a^2+y^2)^{1-n}}\,da = \frac{2^{n-1}y^{\nu+n}(n-1)!\,e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}}{x^n \sin\nu\pi}\,\mathfrak{B}^{-\nu-n,\,n}(xy),$$

qui est valable aussi dans le cas où ν est égal à un entier non négatif, comme le montre clairement (6) § 5. On voit que le second membre de (4), abstraction faite du facteur $\left(\frac{x}{y}\right)^{-\nu}$, est une fonction rationelle et x et de y.

Quant à la fonction $H_1^\nu(x)$, la formule correspondante de (1) ne devient pas aussi élégante; du reste, elle peut être obtenue de (1) à l'aide de (6) § 4, de façon que cette formule n'est au fond autre chose que (1) elle-même.

Les cas particuliers qui rendent inapplicable notre formule (1) se traitent aisément à l'aide des formules du § 18.

En effet, appliquant (3), (6) § 18, on aura respectivement ces deux formules intéressantes:

$$(5)\qquad \int_0^\infty \frac{H_2^p(-axi)\,a^{p+1}}{(a^2+y^2)^{\rho+1}}\,da = \frac{\pi i^{p+1} x^\rho y^{p-\rho}}{2^{\rho+1}\,\Gamma(\rho+1)\sin\rho\pi}\Big(Y^{p-\rho}(xy) - L^{\rho-p,\,p}(xy)\Big),$$

$$(6)\qquad \int_0^\infty \frac{H_2^p(-axi)\,a^{p+1}}{(a^2+y^2)^{q+1}}\,da = \frac{\pi(-x)^q y^{p-q}\,i^{p+1}}{2^{q+1}\cdot q!}\,P^{p-q,\,q}(xy).$$

Posons encore dans (1) $\rho = -\nu$ ou $\rho = -\nu-1$, nous obtiendrons deux formules contenant respectivement les fonctions $\Pi^{2\nu}(x)$ et $X^{2\nu+1}(x)$ d'ANGER.

§ 22. *Généralisation d'une intégrale de Meissel.*

On obtiendra certainement les cas particuliers les plus intéressants de (1) § 21 en y posant $\nu = n-\frac{1}{2}$, où n désigne un entier non négatif. Mettons encore $\rho = -\omega+n-\frac{1}{2}$, nous aurons cette formule remarquable:

$$(1)\qquad \int_0^\infty \frac{H_2^{n-\frac{1}{2}}(-axi)\,a^{n+\frac{1}{2}}}{(a^2+y^2)^{n-\omega+\frac{1}{2}}}\,da = \frac{e^{\frac{2n+1}{4}\pi i}\,\Gamma(\omega-n+\frac{1}{2})\,y^\omega}{2^{n-\omega+\frac{1}{2}}\,x^{\omega-n+\frac{1}{2}}}\left(Z^{\omega,\,-n}(xy) - Y^\omega(xy)\right),$$

d'où, en posant $n = 0$

$$(2)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}(a^2+y^2)^{\omega-\frac{1}{2}}\,da = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\omega+\frac{1}{2})\,y^\omega}{2^{1-\omega}\,x^\omega}\left(Z^\omega(xy) - Y^\omega(xy)\right),$$

formule dont le cas particulier $\omega = 0$ appartient à MEISSEL [1] qui a défini la fonction $Z^0(x)$ à l'aide de sa série de puissances sans connaître évidemment son expression intégrale analogue à celle de $J^0(x)$. Posons encore dans (2) $y = 1$, nous obtiendrons l'intégrale définie que j'ai appliquée récemment dans mes recherches générales sur les séries de factorielles [2].

[1] Gewerbschulprogramm Iserlohn 1862; citat de Meissel, Jahresbericht über die Ober-Realschule in Kiel 1890, p. 2.

[2] Comptes rendus, 30 décembre 1901, 20 janvier 1902.

Appliquons maintenant l'expression intégrale obtenue pour $Z^{\omega}(x)$, nous aurons pour $Y^{\omega}(x)$ cette expression intégrale remarquable qui me paraît nouvelle dans cette généralité; si ω est un entier, la formule appartient à M. H. WEBER[1]:

$$(3) \qquad Y^{\omega}(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\omega}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\omega+\frac{1}{2})}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi)(\cos\varphi)^{2\omega}\,d\varphi - \int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}\,da}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}-\omega}}\right),$$

valable pourvu que l'on ait généralement:

$$(4) \qquad \Re(\omega) > -\tfrac{1}{2}, \quad \Re(x) > 0$$

ou particulièrement

$$(5) \qquad \Re(x) = 0, \quad \tfrac{1}{2} > \Re(\omega) > -\tfrac{1}{2}.$$

Dans le cas particulier où $\omega + \frac{1}{2}$ est égal à l'entier non positif $-n$, la formule (2) est en défaut et doit être remplacé par cette autre:

$$(6) \qquad \int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}\,da}{(a^2+y^2)^{n+1}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\cdot n!}\left(\frac{x}{2y}\right)^{n+\frac{1}{2}}\left(Y^{-n-\frac{1}{2}}(xy) - (-1)^n L^{-n-\frac{1}{2},\,n}(xy)\right).$$

Remarquons encore que la formule (2) nous conduira aux formules (8), (9) § 20 de MEHLER et de M. WEBER. En effet, supposons satisfaites les conditions (5), nous n'avons qu'à intégrer le long de la circonférence d'un quart de cercle convenable.

§ 23. Représentation asymptotique de la fonction de Lommel.

Pour développer en série asymptotique la fonction de LOMMEL, multiplions par $y^{2\rho+2}$ les deux membres de (1) § 21; nous avons à étudier cette intégrale définie:

$$(1) \qquad f(x) = \int_0^{\infty}\frac{H_2^{\nu}(-axi)\,a^{\nu+1}}{\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)^{\rho+1}}\,da,$$

[1] Journal de Crelle, t. LXXVI, p. 9; 1873.

où il faut admettre à la fois que la partie réelle de x est positive et que y n'est pas égal à une quantité purement imaginaire.

Cela posé, nous aurons ce développement en série de TAYLOR:

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{y^2}\right)^{-\rho-1} = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{-\rho-1}{s} \left(\frac{\alpha}{y}\right)^{2s} + \binom{-\rho-1}{n+1} \left(\frac{\alpha}{y}\right)^{2n+2} R_n,$$

ce qui donnera, en vertu de (2) § 13

$$(2) \qquad f(x) = \frac{e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i} y^{\nu+2}}{2\pi} \sum_{s=0}^{s=n} \binom{-\rho-1}{s} \Gamma(\nu+s+1)\, s! \left(\frac{2}{xy}\right)^{\nu+2s+2} + R_n',$$

où l'on a posé pour abréger

$$R_n' = \frac{\binom{-\rho-1}{n+1}}{y^{2n+2}} \int_0^\infty H_2^\nu(-\alpha x i)\, \alpha^{\nu+2n+3} R_n \, d\alpha.$$

Or, en se rappelant que pour des valeurs très grandes de $|x|$ la fonction cylindrique $H_2^\nu(-\alpha x i)$ peut être remplacée par $e^{-\alpha x}$, on voit sur-le-champ que

$$\lim_{|x|=\infty} \left(x^{2n} R_n'\right) = 0, \quad \Re(x) > 0,$$

de façon que (2) nous donne précisément le développement en série asymptotique de $f(x)$.

Supposons maintenant $\Re(x) > 0$, la formule (2) garde sa validité si nous posons $y = 1$, de sorte que nous n'avons à étudier notre série asymptotique que pourvu que l'argument soit purement imaginaire. A cet égard supposons

$$xy = ri, \quad r > 0,$$

nous avons à mettre:

$$x = re^{\varphi i}, \quad y = ie^{-\varphi i}; \quad \frac{\pi}{4} > \varphi > -\frac{\pi}{4},$$

et la formule (2) garde sa validité dans ce cas aussi. De cette manière nous avons démontré ce théorème général:

Le développement en série asymptotique

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{\sin \pi\rho}\left(Y^{\nu-\rho}(x) - \cot \nu\pi\, J^{\nu-\rho}(x) + \dfrac{2}{\sin 2\nu\pi}\, \Pi^{\nu-\rho,\, -\nu-\rho}(x)\right) \sim \\ \sim \left(\dfrac{2}{x}\right)^{\nu+\rho} \cdot \sum\limits_{s=0}^{s=n} (-1)^s\, \Gamma(\rho+s+1)\, \Gamma(\nu+s+1) \left(\dfrac{2}{x}\right)^{2s+2} \end{cases}$$

est valable pourvu que $\Re(\nu) > -1$ *et pour des valeurs extrêmement grandes de* $|x|$, *si nous posons*

$$(4)\qquad x = |x| e^{\varphi i}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq +\frac{\pi}{2}.$$

Supposons maintenant que $\Re(\nu) \leqq -1$, nous avons à remplacer ν et ρ respectivement par $\nu+n$ et $\rho+n$, où n désigne un positif entier suffisamment grand pour que $\Re(\nu+n) > -1$. Cela posé, nous aurons:

$$(5)\quad \begin{cases} \Pi^{\nu-\rho,\, -\nu-\rho-2n}(x) = \\ = \Pi^{\nu-\rho,\, -\nu-\rho}(x) + \cos \nu\pi \cdot \sum\limits_{s=0}^{s=n-1} \dfrac{(-1)^s \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\nu-\rho-2n+2s}}{\Gamma\left(\dfrac{-\rho+\nu}{2}+s+1\right) \Gamma\left(\dfrac{-\rho-\nu}{2}-n+s+1\right)}, \end{cases}$$

et la fonction figurant au premier membre peut être développée à l'aide de (3).

Si les conditions (4) ne sont pas remplies, nous avons à appliquer cette identité:

$$(6)\qquad \Pi^{\nu-\rho,\, -\nu-\rho}\left(x e^{p\pi i}\right) = e^{-(\nu+\rho)p\pi i}\, \Pi^{\nu-\rho,\, -\nu-\rho}(x),$$

où p désigne un nombre entier.

Il est évident que la forme de (3) est inapplicable dans le cas particulier où ρ est un négatif entier; or dans ce cas notre formule (3) se réduit pour n suffisamment grand à l'expression de $\mathfrak{B}^{\nu, n}(x)$ donnée au § 5 formule (6), ce qui s'accorde bien avec (4) § 21.

§ 24. Discussion des cas particuliers de la fonction de Lommel.

En terminant ces recherches nous avons à indiquer les cas particuliers de la formule (3) § 23 que l'on a à appliquer pour effectuer un calcul numérique des fonctions plus particulières.

En premier lieu, faisons $\rho = -\nu$, puis posons $\frac{\nu}{2}$ au lieu de ν, nous aurons cette formule particulière:

$$(1) \qquad \Pi^{\nu}(x) - \cos^2\frac{\nu\pi}{2} J^{\nu}(x) + \frac{\sin\nu\pi}{2} Y^{\nu}(x) \backsim -\frac{\sin\nu\pi}{\pi} A^{\nu}(x),$$

où l'on a posé pour abréger:

$$(2) \qquad A^{\nu}(x) = \frac{\nu}{x^2} + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\nu(\nu^2-2^2)\dots(\nu^2-(2s)^2)}{x^{2s+2}}.$$

Posons encore $\rho = -\nu - 1$, puis mettons $\frac{\nu-1}{2}$ au lieu de ν, nous aurons de même cette formule analogue:

$$(3) \qquad X^{\nu}(x) - \sin^2\frac{\nu\pi}{2} J^{\nu}(x) - \frac{\sin\nu\pi}{2} Y^{\nu}(x) \backsim \frac{\sin\nu\pi}{\pi} B^{\nu}(x),$$

où l'on a posé

$$(4) \qquad B^{\nu}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(\nu^2-1^2)(\nu^2-3^2)\dots(\nu^2-(2s-1)^2)}{x^{2s+1}}.$$

Ajoutons maintenant les formules (1), (3), puis appliquons (9) § 6, nous aurons ces deux formules remarquables:

$$(5) \qquad \Psi^{\nu}(x) - J^{\nu}(x) \backsim \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\left(B^{\nu}(x) - A^{\nu}(x)\right),$$

$$(6) \qquad \Omega^{\nu}(x) - Y^{\nu}(x) \backsim -\frac{1-\cos\nu\pi}{\pi} B^{\nu}(x) - \frac{1+\cos\nu\pi}{\pi} A^{\nu}(x).$$

Remplaçons dans ces deux formules $J^{\nu}(x)$ et $Y^{\nu}(x)$ par leurs expressions asymptotiques obtenues de (11), (12) § 11, nous retrouvons les deux formules que M. H.-F. WEBER[1] (Zurich) a communiquées sans démonstration. Posant encore dans (5) $\nu = 0$, $\nu = 1$, on retrouve les deux formules particulières appliquées par M. le comte DE RAYLEIGH[2].

Posons ensuite dans (3) § 23 $\nu = n - \frac{1}{2}$, $\rho = -\omega + n - \frac{1}{2}$, n désignant un entier non négatif, nous aurons:

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & Z^{\omega, n}(x) - Y^{\omega}(x) \sim -\frac{(-1)^n \cos \omega\pi}{\pi^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\omega+1-2n} \cdot \\ & \qquad \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \,\Gamma(s+n+\tfrac{1}{2})\, \Gamma(n-\omega+s+\tfrac{1}{2}) \left(\frac{2}{x}\right)^{2s+2}. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas $n = 0$ et ω positif entier, notre formule (7) est due à M. P. SIEMON[3].

Après avoir déduit ces formules connues, nous avons encore à développer en série asymptotique les deux fonctions nouvelles $L^{\nu, q}(x)$ et $P^{p, q}(x)$. A cet égard posons dans la formule générale $\nu = p$ et $\rho = p - \omega$, p étant un entier non négatif, nous aurons

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} & L^{\omega, p}(x) - Y^{\omega}(x) \sim \frac{(-1)^p \sin \omega\pi}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^{2p-\omega} \cdot \\ & \qquad \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s (p+s)!\, \Gamma(p+s-\omega+1) \left(\frac{2}{x}\right)^{2s+2}. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas particulier où ω est égal à un nombre entier plus grand que p, la série figurant au second membre de (8) deviendra une série finie, ce qui s'accorde bien avec la formule (6) § 6. Au contraire, supposons ω égal au nombre entier q qui ne surpasse pas p, la formule (8) nous donne, en vertu de (9) § 7, cet autre développement asymptotique:

[1] Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, t. XXIV, p. 48; 1879.

[2] Theory of Sound, t. II, p. 164.

[3] Programm der Luisenschule, Berlin 1890, p. 13.

$$
(9)\quad \begin{cases} P^{p+q,\,p}(x) \sim (-1)^{p+q}\left(\dfrac{2}{x}\right)^{2p-q} \cdot \\ \cdot \displaystyle\sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s (p+s)!\,(p-q+s+1)!\left(\frac{2}{x}\right)^{2s+2}. \end{cases}
$$

Les formules développées dans ce paragraphe et dans le paragraphe précédent nous permettent de calculer toujours une intégrale particulière de l'équation différentielle lineaire non homogène (1) § 7; de plus nous connaissons tous les points singuliers finis de la même intégrale. Cela posé, appliquons (11), (12) § 11, nous verrons que c'est la même chose pour l'intégrale complète de l'équation susdite; c'est-à-dire que nous connaissons parfaitement, d'après M. Hadamard[1], cette intégrale complète.

Copenhague, le 16 mars 1902.

[1] Sur la série de Taylor, p. 11. Paris 1901.

Table des Matières.

pag.

Troisième Partie.

Représentation asymptotique de la fonction de Lommel.